Gas Gesetze

Rafael Ostertag

2005-08-19

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

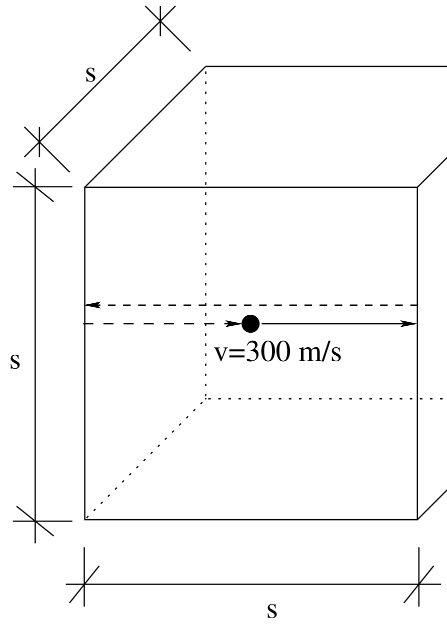

Abbildung 1: Würfel mit einem Gasteilchen

1 Gase auf mikroskopischer Ebene (theoretisch)

1.1 Statistische Beschreibung eines Gases

- Gasteilchen können als Massenpunkte betrachtet werden.
- Kollidiert ein Gasteilchen mit einem anderen oder mit der Gefässwand, so wird es einfach elastisch reflektiert.
- Ausser bei Kollisionen wirken keine Kräfte auf die Gasteilchen.
- Die Bewegung der Gasteilchen ist völlig ungeordnet.

1.2 Gesetz des idealen Gases (theoretisch)

Annahme Ein Würfel mit der Kantenlänge s enthält nur ein Gasteilchen mit der Geschwindigkeit $300\frac{m}{s}$. Das Gasteilchen bewegt sich parallel der x-Achse nach rechts (siehe Abbildung 1).

Prozess Nach dem Aufprall mit der Geschwindigkeit $v_1 = 300\frac{m}{s}$ auf die rechte Gefässwand erfährt das Gasteilchen einen Stoss in die entgegengesetzte Richtung. Es bewegt sich nun mit entgegengesetzter Geschwindigkeit $v_2 = -300\frac{m}{s}$ nach links. Die Geschwindigkeitsänderung beträgt somit:

$$v_2 - v_1 = -600\frac{m}{s}$$

Für den Betrag der Geschwindigkeitsänderung eines Gasteilchens gilt also:

$$\Delta v = 2v$$

Die Flugzeit zwischen zwei Stössen auf der rechten Wand ist bei dem Würfel aus Abbildung 1 auf der vorherigen Seite

$$\Delta t = \frac{2s}{v}$$

Die Kraft auf das Gasteilchen während dem elstischen Stoss kann mit dem 2. Newton'schen Gesetz berechnet werden (siehe auch [DYN]):

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Die Geschwindigkeitsänderung beim Stoss beträgt Δv. Die Kraft ist somit:

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{2v}{\Delta t}$$

Δt ist das Zeitintervall zwischen zwei Stössen mit der gleichen Gefässwand

$$\Delta t = \frac{2s}{v}$$

Die mittlere Kraft auf die rechte und linke Gefässwand ist somit:

$$F = m \cdot \frac{2v}{\Delta t} = m \cdot \frac{2v}{\frac{2s}{v}} = \frac{mv^2}{s}$$

Der mittlere Druck p eines Gasteilchens auf die rechte und linke Würfelfläche ist somit:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{F}{s^2} = \frac{\frac{mv^2}{s}}{s^2} = \frac{mv^2}{s^3} = \frac{mv^2}{V}$$

Wenn sich N Gasteilchen mit einer mittleren v^2 im Würfel befinden, die sich alle in x-Richtung bewegen, so ist der Druck auf die rechte und linke Seite N-mal so gross:

$$p = N \cdot \frac{mv^2}{V}$$

Da sich nicht alle N Teilchen in x-Richtung bewegen, sondern auch in y und z-Richtung, verteilt sich die Kraft eine 3-mal so grosse Fläche. Der Druck ist somit nur $\frac{1}{3}$ so gross:

$$p = \frac{N}{3} \cdot \frac{mv^2}{V}$$

Umgeformt ergibt sich die übliche Form des *Gesetzes des idealen Gases*:

$$p \cdot V = \frac{1}{3} \cdot N \cdot m \cdot v^2 \qquad (1)$$

Gleichung (1) gibt den Zusammenhang zwischen dem Gasdruck und der Geschwindigkeit der Gasteilchen wieder. Die Gleichung sagt folgendes über den Gasdruck in einem idealen Gas aus:

- Je grösser die Anzahl Gasteilchen, die sich im Volumen aufhalten, umso grösser der Druck.
- Je grösser die Masse der Gasteilchen, umso grösser der Druck.
- Die Geschwindigkeit spielt eine doppelte Rolle. Wenn die Geschwindigkeit gross ist, so wirkt beim Stoss mit der Behälterwand eine grössere Kraft. Zudem kommt es häufiger zu Stössen, da ein schnelles Gasteilchen schneller erneut mit der Gefässwand kollidiert. Darum ist der Druck proportional zur Geschwindigkeit im Quadrat.
- Je grösser das Volumen, auf das sich die Gasteilchen verteilen, umso kleiner der Druck.

1.2.1 Kinetische Energie

Die kinetische Energie E_k eines Gasteilchens der Masse m und der Geschwindigkeit v ist:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

In die Gleichung (1) eingesetzt, erhält man eine andere Form des Gesetzes des idealen Gases:

$$p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot E_k \tag{2}$$

Die Gleichung (2) gibt den Zusammenhang der mittleren kinetischen Energie E_k der Gasteilchen und dem Druck p des idealen Gases an.

2 Gase auf makroskopischischer Ebene (experimentell)

Im 17. und 18. Jahrundert haben Experimente gezeigt, dass Temperatur, Volumen und Gasmenge den Gasdruck bestimmen. Die gefundene Beziehung wird durch die Gleichung (3) beschrieben:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \tag{3}$$

Definition 1 *R ist die so genannte universelle Gaskonstante:*

$$R = 8.31 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$$

Das Gesetz des idealen Gases (Gleichung (3)) schafft den Zusammenhang zwischen der Gasmenge n des Gases und den Grössen Druck p, Volumen V und Temperatur T des Gases.

2.1 Isotherme Prozesse

Falls die Temperatur T des Gases während einem Prozess konstant ist, so ist das Produkt Druck p und Volumen V konstant[1]:

$$p \cdot V = \text{konstant}$$

2.2 Isochore Prozesse

Falls das Volumen V des Gases während dem Prozess konstant ist, so ist das Verhältnis aus Druck p und Temperatur T konstant[2]:

$$\frac{p}{T} = \text{konstant}$$

2.3 Isobare Prozesse

Falls der Druck p des Gases während dem Prozess konstant ist, so ist das Verhältnis aus Volumen V und Temperatur T konstant[3]:

$$\frac{V}{T} = \text{konstant}$$

2.4 Gesetz des idealen Gases mit Boltzmann-Konstante

Um direkt mit der Anzahl Teilchen N in einem Gas zu rechnen, wird folgende Gleichung benötigt:

$$p \cdot V = \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T, \qquad N_A = \text{Avogadro-Konstante}$$

Definition 2 *Das Verhältnis aus universeller Gaskonstante R und Avogadro-Konstante N_A wird Boltzmann-Konstante k genannt:*

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.31 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}{6.02 \cdot 10^{-23} mol^{-1}} = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$$

Das Gesetz des idealen Gas lautet dann:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T \tag{4}$$

Das Gesetz des idealen Gases schafft in dieser Form den Zusammenhang zwischen der Anzahl Teilchen N des Gases, dem Gasdruck p, dem Gasvolumen V und der Gastemperatur T.

---

[1] Gesetz von Boyle-Mariotte
[2] Gesetz von Amonton
[3] Gesetz von Gay-Lussac

2.5 Gesetz von Avogadro

Das Gesetz des idealen Gases zeigt in der Schreibweise von (4) eine zentrale Eigenschaft von Gasen, die als das Gesetz von Avogadro bekannt ist: Bei gleichem Druck p und gleicher Temperatur T enthält ein gleiches Volumen V unabhängig von der chemischen Zusammensetzung stets die Gleiche Anzahl Gasteilchen:

$$N = \frac{p \cdot V}{k \cdot T}$$

3 Kombination mikro- und makroskopischer Beschreibung

Bei beiden Gleichungen (1) und (3) steht auf der linken Seite das Produkt $p \cdot V$. Es können somit die beiden rechten Seiten gleich gesetzt werden:

$$\frac{2}{3} \cdot N \cdot E_k = N \cdot k \cdot T$$

Gekürzt und nach der mittleren kinetischen Energie E_k der Gasteilchen aufgelöst:

$$E_k = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \tag{5}$$

Die Gleichung (5) schaft einen Zusammenhang zwischen der makroskopischen Grösse Temperatur T und der mikroskopischen Grösse mittlere kinetische Energie E_k der Gasteilchen.

Der Zusammenhang zwischen Temeperatur T und mittlerer kinetischer Energe E_k in Gleichung (5), die hier für ideale Gase hergeleitet wurden, gilt nicht nur für Gase, sondern auch für Festkörper und Flüssigkeiten: Die Temperatur eines Körpers ist immer proportional zur mittleren kinetischen Energie E_k der Atome des Körpers.

Literatur

[PHYS2] Hansruedi Schild und Thomas Dumm, *Physik 2*, Lerntext, Aufgaben mit kommentierten Lösungen und Kurztheorie, 2003, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, ISBN 3-7155-9088-2

[DYN] Rafael Ostertag, *Zusammenfassung Dynamik*, 2004, `http://www.guengel.ch/ame/summaries/physics/dynamics.pdf`