Zusammenfassung Trigonometrie

Rafael Ostertag

2005-05-16

Zusammenfassung

TBD

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einführung

1.1 Dreieck

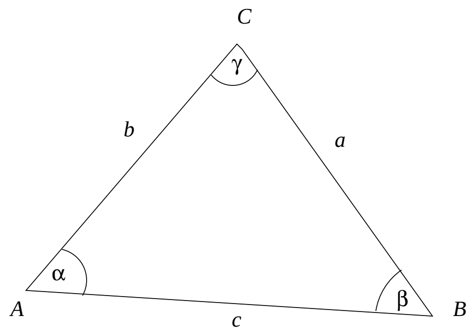

Abbildung 1: Beschriftung des Dreiecks

Abbildung 1 zeigt die Beschriftung des Dreiecks. Die Ecken des Dreiecks werden mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Im allgemeinen wird die Bezeichnung so gewählt, dass die Ecken alphabetisch entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Die drei Verbindungsstrecken der Ecken werden Seiten des Dreiecks genannt und mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Die Seite a liegt der Ecke A, die Seite b der Ecke B und die Seite c der Ecke C gegenüber.

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

1.1.1 Rechtwinkliges Dreieck

Dreiecke mit einem rechten Winkel heissen rechtwinklig. Die beiden anderen Winkel sind spitz. Die Seite des Dreiecks, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heisst *Hypotenuse*. Die beiden anderen werden *Katheten* genannt. Die der Hypotenuse anliegende Winkel sind komplementär[1], ihre Summe ist 90°.

1.2 Drehung und Drehwinkel

Die Drehung des Endschenkels erfolgt im Gegenuhrzeigersinn, wenn α positiv ist (Abbildung 2 auf der nächsten Seite links), im Uhrzeigersinn, wenn α negativ ist (Abbildung 2 auf der nächsten Seite rechts).

[1] Komplementärwinkel (oder Komplementwinkel) heissen zwei Winkel, die sich zu einem rechten Winkel ergänzen. In diesem Fall heisst jeder Winkel Komplementärwinkel des anderen.

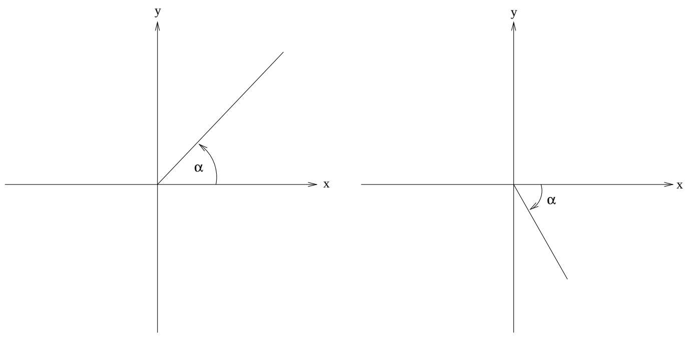

Abbildung 2: Drehung: positiver und negativer Winkel

Ist α ein beliebiger Drehwinkel, so ergibt sich der gleiche Endschenkel, wenn man α um ein ganzzahliges Vielfaches von 360° ändert.

1.3 Ankathete und Gegenkathete

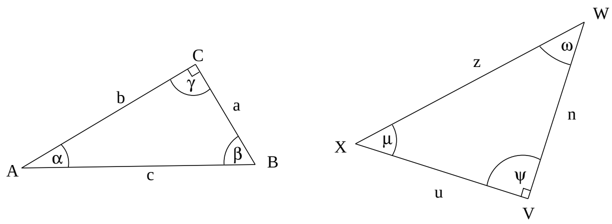

Abbildung 3: Ankathete und Gegenkathete

Ankathete und Gegenkathete bezeichnen die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks relativ zu einem bestimmten Innenwinkel. Die Kathete, die einem Innenwinkel anliegt heisst *Ankathete*. Die Kathete gegenüber diesem Innenwinkel heisst *Gegenkathete*.

Beispiele (siehe dazu Abbildung 3):

Innenwinkel α Ankathete b; Gegenkathete a

Innenwinkel β Ankathete a; Gegenkathete b

Innenwinkel ω Ankathete n; Gegenkathete u

Teil I
Sinus und Cosinus

2 Definition der Sinus- und der Cosinusfunktion

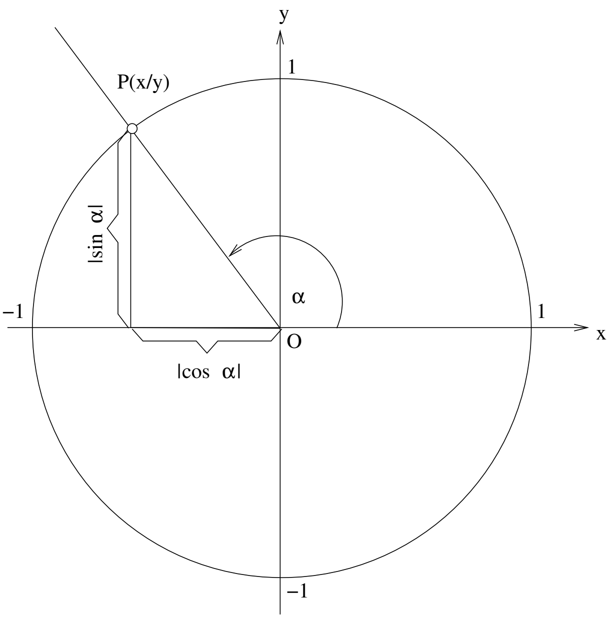

Abbildung 4: Definition von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ am Einheitskreis

Unter einem *Einheitskreis* versteht man einen Kreis, wie in Abbildung 4, dessen Radius eine Längeneinheit misst.

Ist α eine beliebiger Winkel, so erhält man $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ wie folgt: Man betrachtet ein Koordinatensystem mit Einheitskreis und dreht die positive x–Achse um den Winkel α. Der Endschenkel von α schneide den Einheitskreis im Punkt P mit den Koordinaten x, y. Dann ist:

$$\sin\alpha = y \tag{1}$$

$$\cos\alpha = x \tag{2}$$

2.1 Die Sinus- und die Cosinusfunktion

Die Funktionen, welche einem beliebigen Winkel α die Zahl $\sin\alpha$ zuordnet wird als *Sinusfunktion* (Symbol: sin) bezeichnet; man schreibt dafür kürzer:

$$\sin : \alpha \mapsto \sin\alpha \tag{3}$$

Man nennt die Funktion, welche einem beliebigen Winkel α die Zahl $\cos\alpha$ zuordnet, die *Cosinusfunktion* und schreibt:

$$\cos : \alpha \mapsto \cos\alpha \tag{4}$$

3 Aus α, $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ bestimmen

Für alle Winkel α gilt:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$
$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

Um die Gleichung (1) auf Seite 5 graphisch nach α aufzulösen, d.h. den Winkel α graphisch zu bestimmen, gehen wir vom Einheitskreis aus und ziehen eine Parallele zur x–Achse im Abstand $\sin\alpha$. Die Parallele schneidet den Einheitskreis in zwei Punkten P_1 und P_2. Somit hat $\sin\alpha$ immer zwei zugehörige Winkel α_1 und α_2 (Abbildung 5).

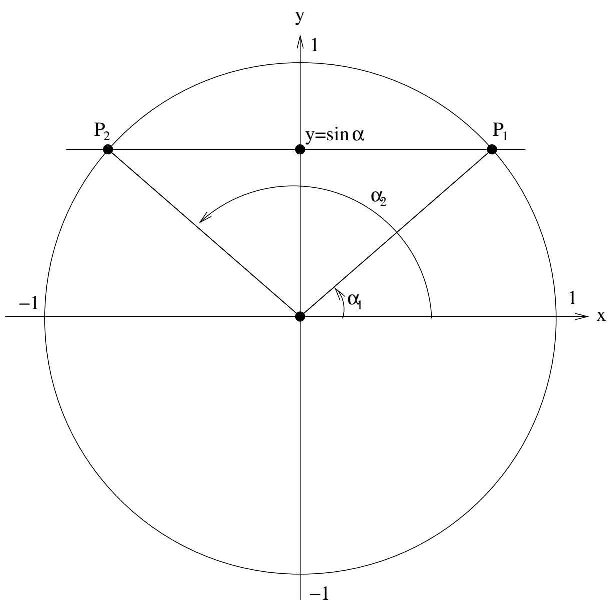

Abbildung 5: $\sin\alpha$ graphisch bestimmen

Analoges gilt für $\cos\alpha$, nur das $\cos\alpha$ den Punkt beschreibt, durch den die Parallele zur y–Achse verläuft (siehe Abbildung 6 auf der nächsten Seite).

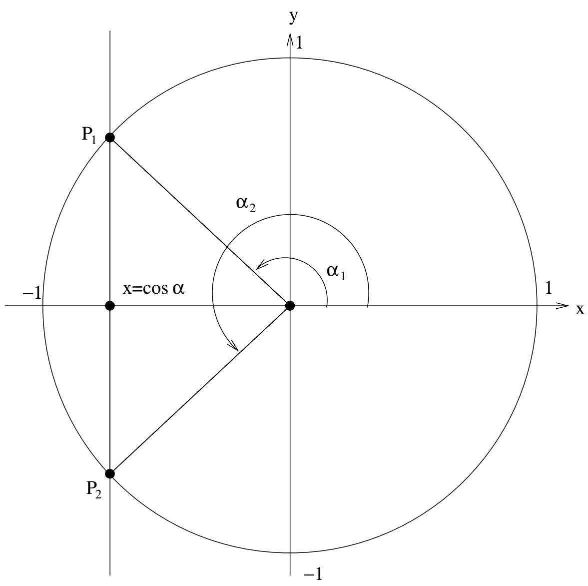

Abbildung 6: $\cos\alpha$ graphisch bestimmen

4 Die Berechnung des Rechtwinkligen Dreiecks

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\text{Sinus eines spitzen Dreieckswinkels} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\text{Cosinus eines spitzen Dreieckswinkels} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Wird das rechtwinklige Dreieck ABC in den Einheitskreis gelegt, ergibt sich folgendes Bild:

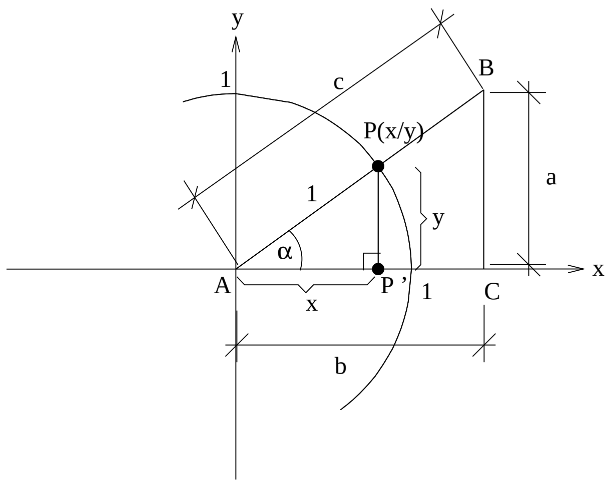

Abbildung 7: Rechtwinkliges Dreieck

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke APP' und ABC ergibt sich

$$\frac{y}{1} = \frac{a}{c} \qquad \text{(2. Strahlensatz)}$$
$$y = \sin\alpha$$

somit

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{a}{c}$$
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Analog kann auch $\cos\alpha$ als Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck ABC dargestellt werden

$$\frac{x}{1} = \frac{b}{c}$$
$$x = \cos\alpha$$

somit

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{b}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Also gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

5 Eigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktion

Die Werte von $\sin\alpha$ liegen im Intervall von $[-1;1]$ was Abbildung 8 zeigt.

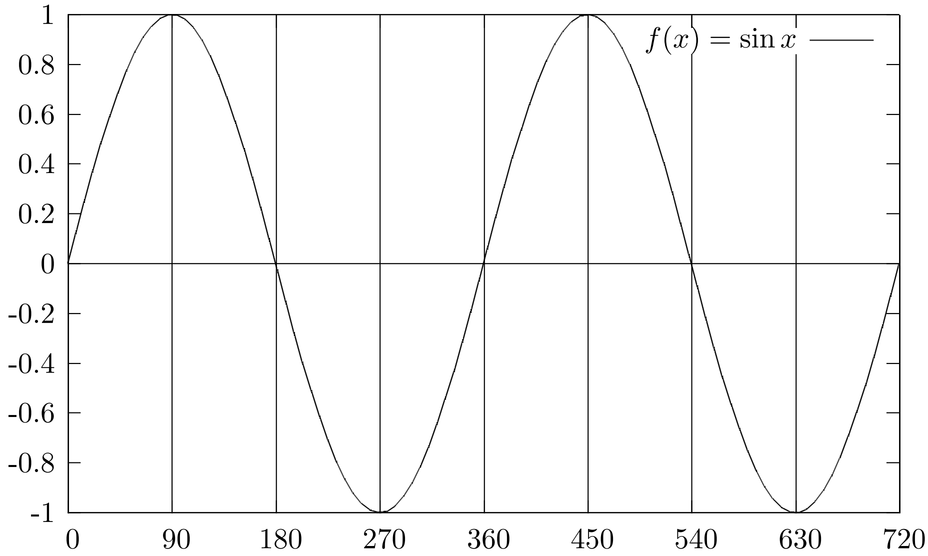

Abbildung 8: Sinuskurve

Die Werte von $\cos\alpha$ liegen ebenfalls im Intervall von $[-1;1]$, wie Abbildung 9 auf der nächsten Seite zeigt. Sie sind allerdings um 90° gegenüber denjenigen der Sinusfunktion verschoben, was sich sehr gut an den Extrema der beiden Funktionsgraphen ablesen lässt (siehe Abbildung 10 auf der nächsten Seite).

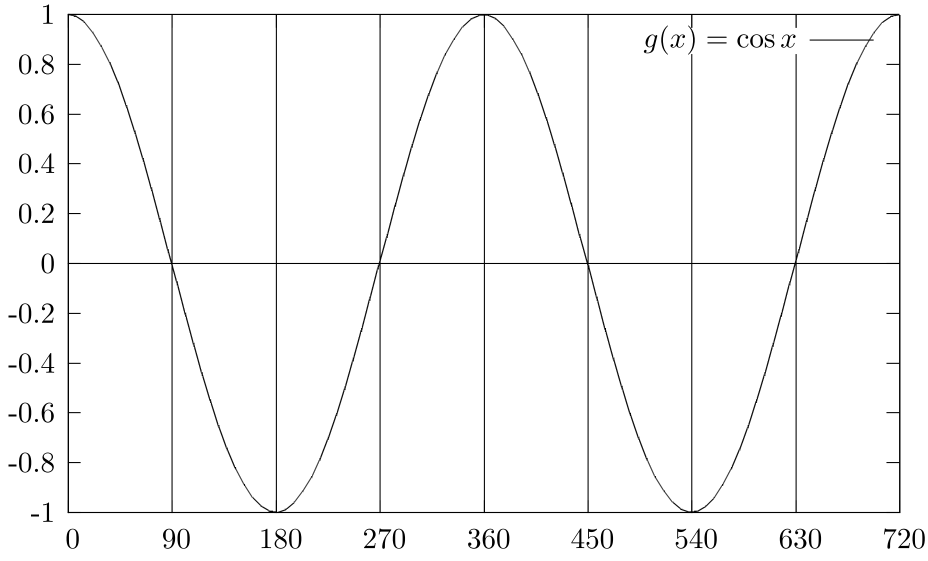

Abbildung 9: Cosinuskurve

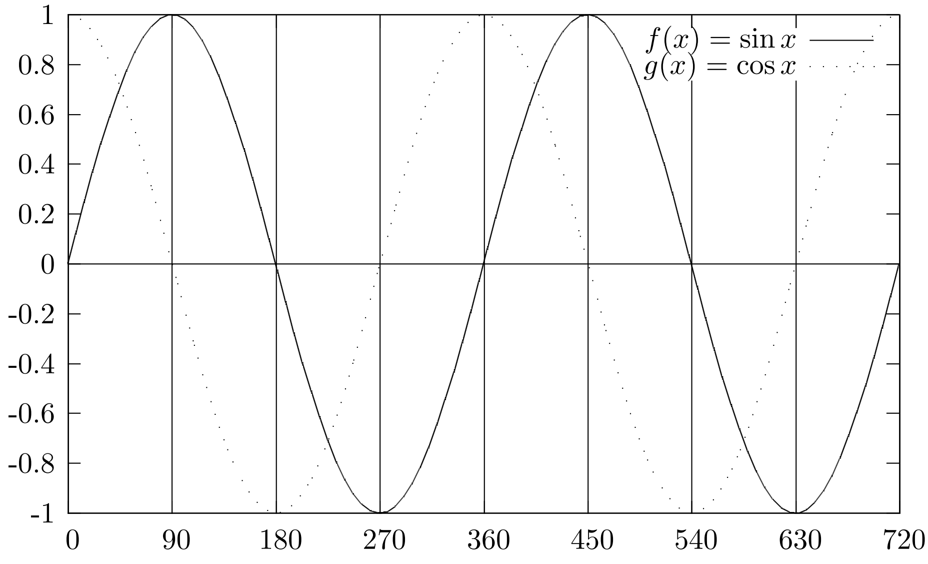

Abbildung 10: Sinus- und Cosinuskurve

Die Abbildung 10 auf der vorherigen Seite lässt darauf schliessen, dass sin sowie cos periodisch sind. Beide haben eine Periode von 360°. Somit gilt für jeden Winkel α und $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + n \cdot 360^\circ) \tag{5}$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + n \cdot 360^\circ) \tag{6}$$

Es gilt somit

$$\sin\alpha = \sin(\alpha \bmod 360) \tag{7}$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha \bmod 360) \tag{8}$$

Aus der Wertetabelle 1 für Sinus und Cosinus wird ersichtlich, dass

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ \tag{9}$$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0°	0	1
45°	0.71	0.71
90°	1	0
135°	0.71	-0.71
180°	0	-1
225°	-0.71	-0.71
270°	-1	0
315°	-0.71	0.71
360°	0	1

Tabelle 1: Sinus- und Cosinuswerte

Wie aus der Abbildung 11 auf der nächsten Seite zu entnehmen ist, gilt in der Trigonometrie ebenfalls das Gesetz von Pythagoras:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Desweiteren gilt:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

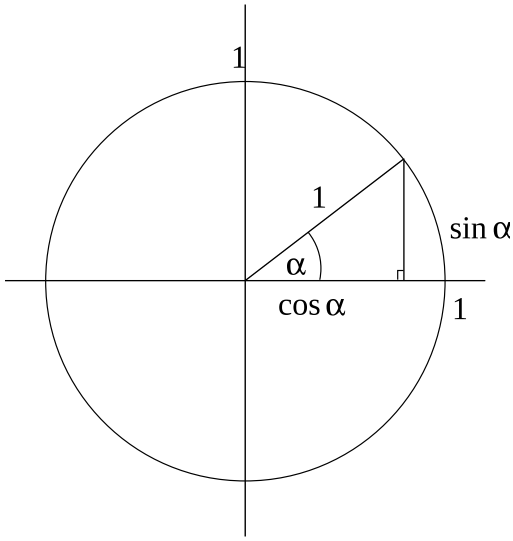

Abbildung 11: Trigonometrischer Pythagoras: sin und cos

Teil II
Tangens und Cotangens

6 Definition von Tangens und Cotangens

Tangens und Cotangens sind wie folgt definiert:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$
$$\cot\alpha = \frac{x}{y}$$

Da x und y als

$$y = \sin\alpha$$

und

$$x = \cos\alpha$$

verstanden werden können, gilt für Tangens und Cotangens ebenfalls

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

6.1 Die grafische Darstellung und Ermittlung von $\tan\alpha$

Der Endschenkel eines beliebigen Winkels α oder die rückwärtige Verlängerung des Endschenkels schneiden den Tangensträger (Tangente zum Punkt $A(1/0)$ in Abbildung 12 auf der nächsten Seite in einem Punkt $Q(1/z)$; in beiden Fällen gilt:

$$z = \tan\alpha$$

Schnittpunkte oberhalb der x–Achse weisen also auf einen positiven, Schnittpunkte unterhalb auf einen negativen Tangenswert hin.

Beweis

$$\triangle 0P'P \sim \triangle 0AQ$$
$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{z}{1}$$
$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = z$$
$$\tan\alpha = z$$

Abbildung 13 auf der nächsten Seite zeigt einen stumpfen Winkel: der Endschenkel schneidet den Tangensträger nicht mehr. Man hat in diesem

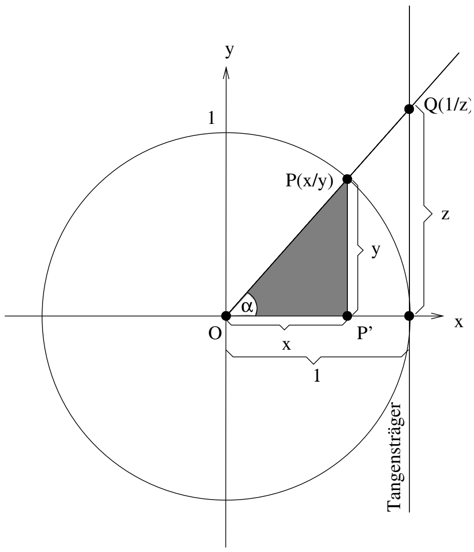

Abbildung 12: Die graphische Darstellung und Ermittlung von $\tan\alpha$

Fall die Verlängerung zu zeichnen und mit dem Tangensträger zu schneiden. Aus der Ähnlichkeit der punktierten Dreiecke folgt wie oben:

$$\tan\alpha = z$$

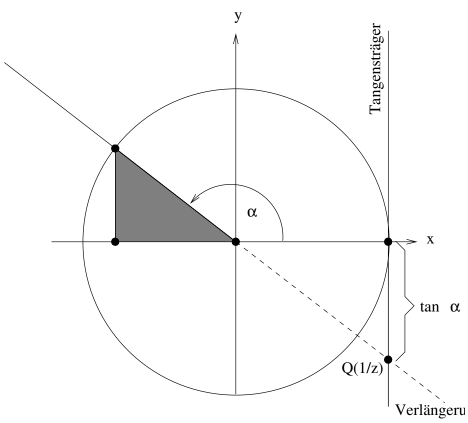

Abbildung 13: Endschenkel von α schneidet Tangensträger nicht

7 Die Funktion Tangens im rechtwinkligen Dreieck

$$\boxed{\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} && (10) \\ \cot\alpha &= \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \alpha} && (11) \end{aligned}}$$

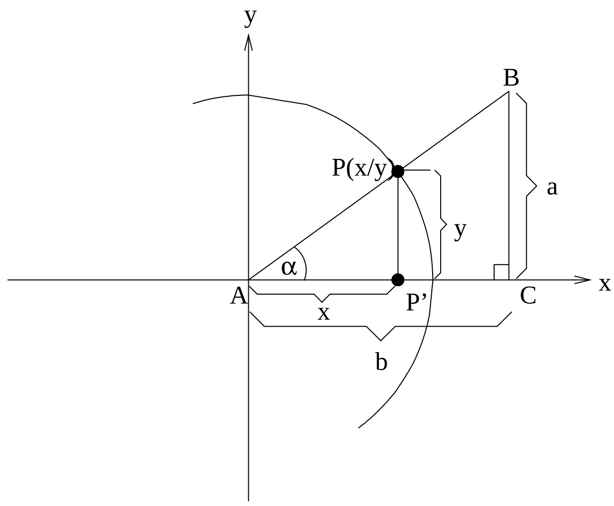

Abbildung 14: Tangens im rechtwinkligen Dreieck

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

aus $\triangle APP' \sim \triangle ABC$ folgt

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

8 Tangens hat die Periode 180°

Die Tangens- und die Cotangensfunktion haben die *Periode* 180°.
Es gilt also für alle Winkel α, für die $\tan\alpha$ bzw. $\cot\alpha$ definiert ist:

$$\tan\alpha = \tan(\alpha + n\cdot 180^\circ)$$
$$\cot\alpha = \cot(\alpha + n\cdot 180^\circ)$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

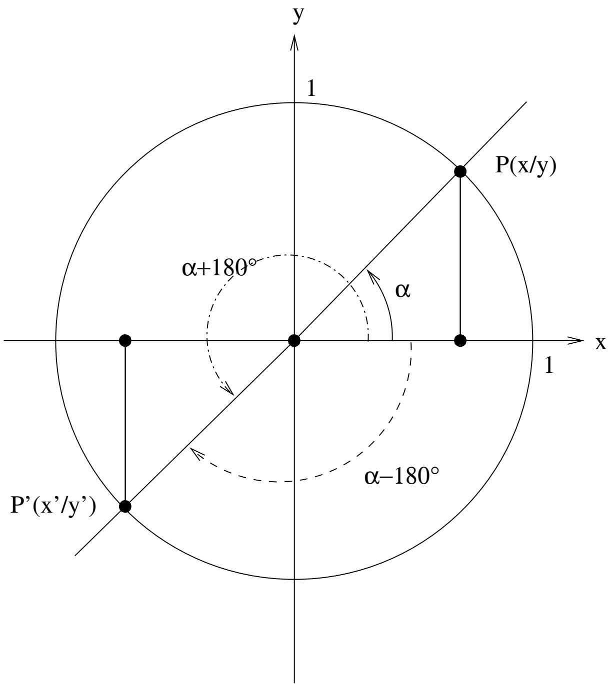

Abbildung 15: Tangens hat die Periode von 180°

Beweis

$$x' = -x \qquad y' = -y$$
$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$
$$\tan(\alpha + 180^\circ) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = \frac{y}{x}$$

somit

$$\tan\alpha = \tan(\alpha + 180^\circ)$$

und

$$\begin{aligned} \alpha + 180^\circ &= \alpha - 180^\circ \\ \tan(\alpha + 180^\circ) &= \tan(\alpha - 180^\circ) \\ \tan\alpha &= \tan(\alpha - 180^\circ) \end{aligned}$$

9 Wie verhält sich $\tan\alpha$ mit wachsendem α?

Wenn α von $0°$ bis $90°$ wächst, so wächst $\tan\alpha$ von 0 bis $+\infty$. Dabei durchläuft $\tan\alpha$ alle positiven reellen Zahlen.

Wenn Wenn α von $90°$ bis $180°$ wächst, so wächst $\tan\alpha$ von $-\infty$ bis 0. Dabei durchläuft $\tan\alpha$ alle negativen reellen Zahlen.

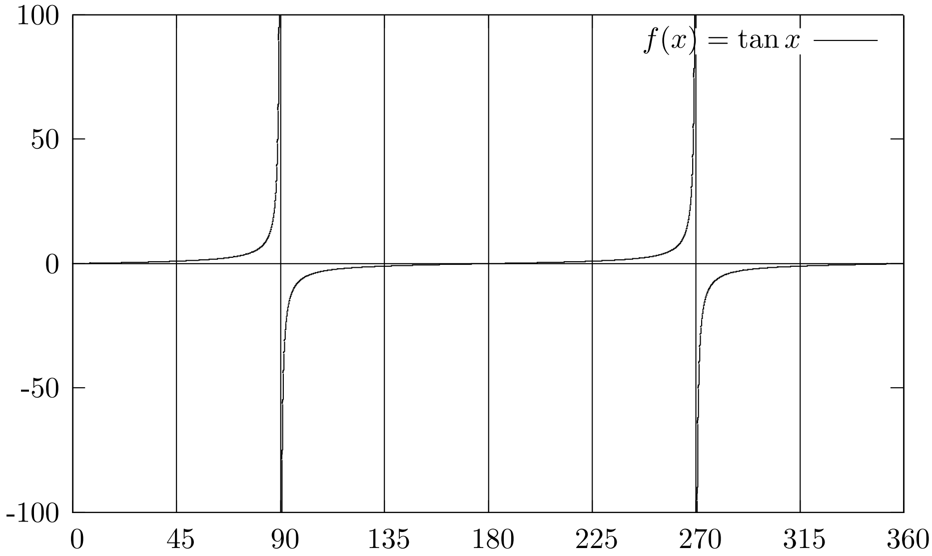

Abbildung 16: $\tan 90° = +\infty$; $\tan 180° = -\infty$

Teil III
Anhang

A Definitionsbereich der Tangensfunktion

$\tan\alpha$ ist genau dann definiert, wenn

$$\alpha \neq 90^\circ + n \cdot 180^\circ \qquad n \in \mathbb{Z}$$

denn falls

$$\alpha = 90^\circ + n \cdot 180^\circ \qquad n \in \mathbb{Z}$$

wird

$$\cos\alpha = 0$$

daraus folgt

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{0}$$

was in $\mathbb{R}$ nicht definiert ist.

B Definitionsbereich der Cotangensfunktion

$\cot \alpha$ ist genau dann definiert, wenn

$$\alpha \neq n \cdot 180^\circ \qquad n \in \mathbb{Z}$$

denn falls

$$\alpha = n \cdot 180^\circ \qquad n \in \mathbb{Z}$$

wird

$$\sin \alpha = 0$$

daraus folgt

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{0}$$

was in $\mathbb{R}$ nicht definiert ist.

C Mathematische Zeichen (Geometrie)

$\cong$ kongruent, deckungsgleich

$\sim$ ähnlich

$\triangle$ Dreieck

$\perp$ rechtwinklig zu

$\parallel$ parallel

$\nparallel$ nicht parallel

Literatur

[GM201] Dr. Paul Streckeisen et al., *Sinus- und Cosinusfunktionen*, Geometrie, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, ISBN 3-7155-0431-5

[GM202] Dr. Paul Streckeisen et al., *Tangens- und Cotangensfunktion, das rechtwinklige Dreieck*, Geometrie, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, ISBN 3-7155-0402-1

[MathematikI] Schülerduden, *Die Mathematik I*, 5., neu bearbeitete Auflage, 1990, Dudenverlag, Mannheim, ISBN 3-411-04205-2

Index