

# Zusammenfassung Quadratische Gleichungen und Funktionen

---

Rafael Ostertag

2005-05-21

---

## **Zusammenfassung**

Das vorliegende Dokument ist eine Zusammenfassung des Stoffes der AKAD Lernhefte [AA112], [AA201] und [AA202]. Beim erstellen des Dokumentes wurde darauf geachtet, dass Definitionen und Sätze eingerahmt am Anfang der Kapitel stehen, sodass ein rasches auffinden möglich ist.

Ferner wurde versucht, Beweise und Herleitungen so ausführlich wie möglich wiederzugeben, teilweise mit zusätzlichen Schritten, die in den Lernheften weggelassen wurden, um die Transparenz des Stoffes zu verbessern.

Themen, die für das allgemeine Verständnis nicht nötig sind oder nur eine untergeordnete Rolle spielen, sind auf die Anhänge A und B verteilt.

An dieser Stelle möchte ich noch Bianka Dubler für das Korrekturlesen und die Ratschläge danken.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Quadratische Gleichung</b>	<b>3</b>
1.1	Allgemeine Form	3
1.2	Allgemeine quadratische Gleichung	3
1.2.1	Quadratische Ergänzung	3
1.2.2	Lösungsformeln	4
1.2.3	Lösungsmengen	5
1.3	Satz von Vieta	7
<b>2</b>	<b>Quadratische Funktionen</b>	<b>10</b>
2.1	Quadratische Grundfunktion $x \mapsto x^2$	10
2.2	Quadratische Funktion mit der Gleichung $y = ax^2$	11
2.2.1	$a > 0$	11
2.2.2	$a < 0$	12
2.3	Allgemeine quadratische Funktion	12
2.4	Parallelverschiebung einer Parabel	14
2.5	Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion ist eine Parabel	16
2.5.1	Sonderfälle	17
2.6	Das Extremum einer quadratischen Funktion	17
2.6.1	Fall $a > 0$	18
2.6.2	Fall $a < 0$	19
2.7	Gleichungen und Funktionen	19
2.7.1	Quadratische Gleichung und quadratische Funktion	19
2.8	Extremwertaufgaben	20
2.8.1	Einfache Berechnung des Parabelscheitels	20
2.8.2	Lösungsschema Extremwertaufgaben	22
<b>3</b>	<b>Anwendung der quadratischen Gleichung und Funktionen</b>	<b>23</b>
3.1	Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen	23
3.1.1	Lösung durch Faktorzerlegung	23
3.1.2	Die biquadratische Gleichung	23
3.2	Wurzelgleichungen	23
3.2.1	Das Quadrieren	23
3.2.2	Kompliziertere Wurzelgleichungen	24
3.3	Gleichungssysteme mit quadratischen Gleichungen	24
3.3.1	Anwendung der Einsetzungs- und der Additionsmethode	24
<b>A</b>	<b>Quadratische Gleichungen</b>	<b>25</b>
A.1	Reinquadratische Gleichung	25
A.1.1	Lösungsmengen	25
A.2	Gleichung der Form $(x + k)^2 = d$	26

ABBILDUNGSVERZEICHNIS	2
-----------------------	---

A.3 Zerlegung von quadratischen Polynomen . . . . .	27
---	----

**B Quadratische Funktionen** **29**

B.1 Der Graph als Superposition von Parabel und Gerade . . . . .	29
--	----

**Literatur** **31**

**Abbildungsverzeichnis**

1 Quadratische Grundparabel . . . . .	10
2 Funktion $f(x) = ax^2$ , $a > 0 \wedge  a  < 1$ . . . . .	11
3 Funktion $f(x) = ax^2$ , $a > 0 \wedge  a  > 1$ . . . . .	12
4 Funktion $f(x) = ax^2$ , $a < 0 \wedge  a  < 1$ . . . . .	13
5 Funktion $f(x) = ax^2$ , $a < 0 \wedge  a  > 1$ . . . . .	13
6 Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ . . . . .	14
7 Parabel mit der Gleichung $y - v = a(x - u)^2$ . . . . .	15
8 Graph schneidet die x-Achse in zwei Punkten . . . . .	20
9 Graph berührt die x-Achse . . . . .	21
10 Graph meidet die x-Achse . . . . .	21
11 Superposition . . . . .	29

**Tabellenverzeichnis**

1 Extremum Beispiel (Minimum) . . . . .	19
2 Superposition . . . . .	30

# 1 Quadratische Gleichung

## 1.1 Allgemeine Form

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformung auf folgende Form bringen lässt wird als quadratische Gleichung bezeichnet:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

Wobei

$ax^2$  das quadratische Glied,

$bx$  das lineare Glied und

$c$  das absolute Glied

ist.

## 1.2 Allgemeine quadratische Gleichung

### 1.2.1 Quadratische Ergänzung

$$\boxed{\text{Quadratische Ergänzung} = \left( \frac{\text{Koeffizient von } x}{2} \right)^2} \quad (2)$$

$$x^2 + bx + c = 0 \quad | -c$$

$$x^2 + bx = -c \quad | + \left( \frac{b}{2} \right)^2 = \frac{b^2}{4}$$

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = -c + \frac{b^2}{4}$$

$$\left( x + \frac{b}{2} \right)^2 = -c + \frac{b^2}{4} \quad | \text{quadratisch ergänzt}$$

$$\Rightarrow \left( x + \frac{b}{2} \right) = u \quad | \text{Substitution}$$

$$u^2 = -c + \frac{b^2}{4}$$

$$u = \sqrt{-c + \frac{b^2}{4}} \quad \vee \quad u = -\sqrt{-c + \frac{b^2}{4}}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2} = \sqrt{-c + \frac{b^2}{4}} \quad \vee \quad x + \frac{b}{2} = -\sqrt{-c + \frac{b^2}{4}} \quad | -\frac{b}{2}$$

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{-c + \frac{b^2}{4}} \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2} - \sqrt{-c + \frac{b^2}{4}}$$

$$x = -\frac{b + \sqrt{-4c + b^2}}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{b - \sqrt{-4c + b^2}}{2}$$

## 1.2.2 Lösungsformeln

Unter der *Diskriminante* der quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  versteht man den Term:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a \quad (3)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad | -\frac{c}{a} \quad (4)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad | + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} \quad (5)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad (6)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (7)$$

Somit haben wir die Gleichung (3) auf die Form

$$(x + k)^2 = d$$

gebracht. Dabei ist

$$k = \frac{b}{2a}$$

und

$$d = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Die Anzahl Lösungen hängt nun von  $d$  bzw.  $b^2 - 4ac$  ab. Denn  $4a^2 > 0$ , aber

- $b^2 - 4ac > 0$  wenn  $4ac < b^2$ ,
- $b^2 - 4ac < 0$  wenn  $4ac > b^2$  und
- $b^2 - 4ac = 0$  wenn  $4ac = b^2$ .

Durch Verwendung der Diskriminante lässt sich die Gleichung (7) auf folgende Form bringen:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \quad (8)$$

**1.2.3 Lösungsmengen**

Die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit der Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

besitzt:

- zwei Lösungen, wenn  $D > 0$  und zwar

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

- eine Lösung, wenn  $D = 0$  und zwar:

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

- keine Lösung, wenn  $D < 0$ .

**Fall  $D > 0$**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Ausgehend von der Gleichung (8).

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{D}{4a^2} \\
 \Rightarrow u &= x + \frac{b}{2a} \\
 \Rightarrow u^2 &= \frac{D}{4a^2} \\
 u &= \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \quad \vee \quad u = -\sqrt{\frac{D}{4a^2}} \\
 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} &= \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{D}{4a^2}} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad | -\frac{b}{2a} \\
 x &= -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \\
 x &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\
 x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}
 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist:

$$L = \left\{ \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right\} \quad (9)$$

**Fall**  $D = 0$

$$\boxed{x_1 = -\frac{b}{2a}}$$

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= 0 \\
 x + \frac{b}{2a} &= 0 \quad | -\frac{b}{2a} \\
 x_1 &= -\frac{b}{2a}
 \end{aligned}$$

**Fall**  $D < 0$

$$\boxed{L = \emptyset}$$

Die rechte Seite der Gleichung (8) ist negativ. Somit ist

$$L = \emptyset$$

**1.3 Satz von Vieta**

Satz von Vieta (Normalform)

$$x^2 + px + q = 0 \quad D > 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

Satz von Vieta (allgemein)

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0, D > 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

*Beweis für Normalform:*

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \text{ wobei } D = p^2 - 4q > 0$$

somit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \\ &= \frac{-p + \sqrt{D} + (-p) - \sqrt{D}}{2} \\ &= \frac{-2p}{2} \\ &= -p \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 x_1 x_2 &= \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \\
 &= \frac{(-p)^2 - \sqrt{D}^2}{4} \\
 &= \frac{p^2 - D}{4} \\
 &= \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} \\
 &= \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} \\
 &= \frac{4q}{4} \\
 &= q
 \end{aligned}$$

*Beweis für allgemeine Form:*

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
 \Rightarrow D &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} \\
 x_1 &= \frac{-\frac{b}{a} + \sqrt{D}}{2} \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{a} - \sqrt{D}}{2}
 \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= \frac{-\frac{b}{a} + \sqrt{D}}{2} + \frac{-\frac{b}{a} - \sqrt{D}}{2} \\
 &= \frac{-\frac{b}{a} + \sqrt{D} + (-\frac{b}{a}) - \sqrt{D}}{2} \\
 &= \frac{-2\frac{b}{a}}{2} \\
 &= -\frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}x_1 x_2 &= \frac{-\frac{b}{a} + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-\frac{b}{a} - \sqrt{D}}{2} \\&= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \sqrt{D}^2}{4} \\&= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - D}{4} \\&= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right)}{4} \\&= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 4\frac{c}{a}}{4} \\&= \frac{4\frac{c}{a}}{4} \\&= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

## 2 Quadratische Funktionen

### 2.1 Quadratische Grundfunktion $x \mapsto x^2$

Quadratische Grundfunktion

$$x \mapsto x^2 \quad D = \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \quad (10)$$

Der Graph der *quadratischen Grundfunktion* mit der Gleichung

$$y = x^2$$

wird als *quadratische Grundparabel* bezeichnet (Abbildung 1). Sie

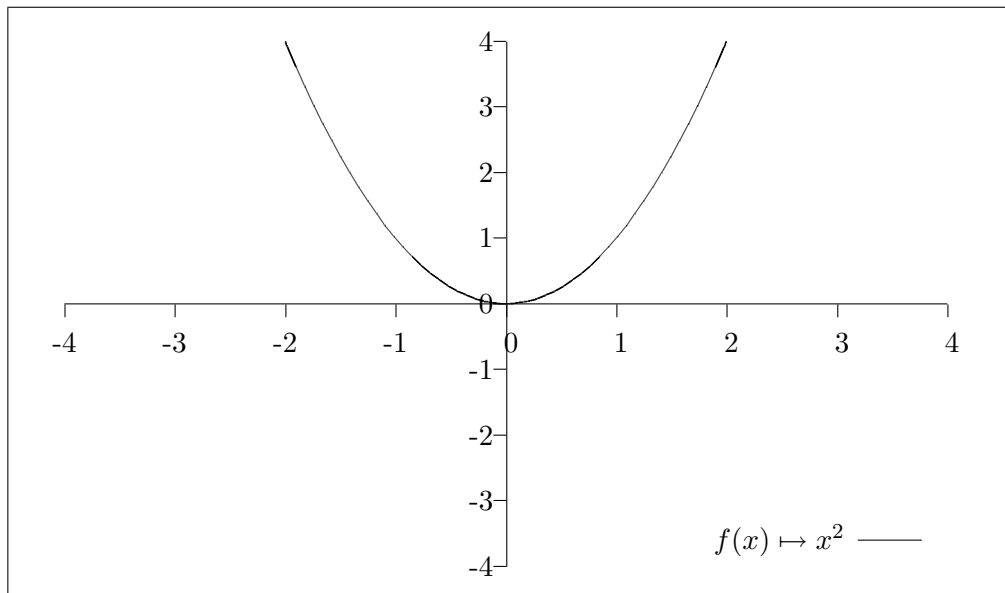


Abbildung 1: Quadratische Grundparabel

- ist axialsymmetrisch zur y-Achse (sog. *Achse* der Parabel),
- geht nach oben, nach rechts und nach links ins Unendliche und
- berührt die x-Achse im Ursprung (sog. *Scheitel* der Parabel).

## 2.2 Quadratische Funktion mit der Gleichung $y = ax^2$

Die Funktion

$$x \mapsto ax^2$$

hat als Graphen eine *Parabel* mit der  $y$ -Achse als Achse und mit dem Scheitel im Ursprung. Diese Parabel ist für

$a > 0$  nach *oben* geöffnet, und für

$a < 0$  nach *unten* geöffnet;

ferner ist sie für

$|a| > 1$  *steiler* als die Grundparabel, und für

$|a| < 1$  *flacher* als die Grundparabel.

### 2.2.1 $a > 0$

Gemäss obigem Satz ist die Funktion  $f(x) = ax^2$  mit  $a > 0$  nach oben geöffnet, jedoch abhängig von  $|a|$  entweder steiler oder flacher als die Grundparabel.

$|a| < 1$  Die Parabel ist flacher als die Grundparabel (Abbildung 2).

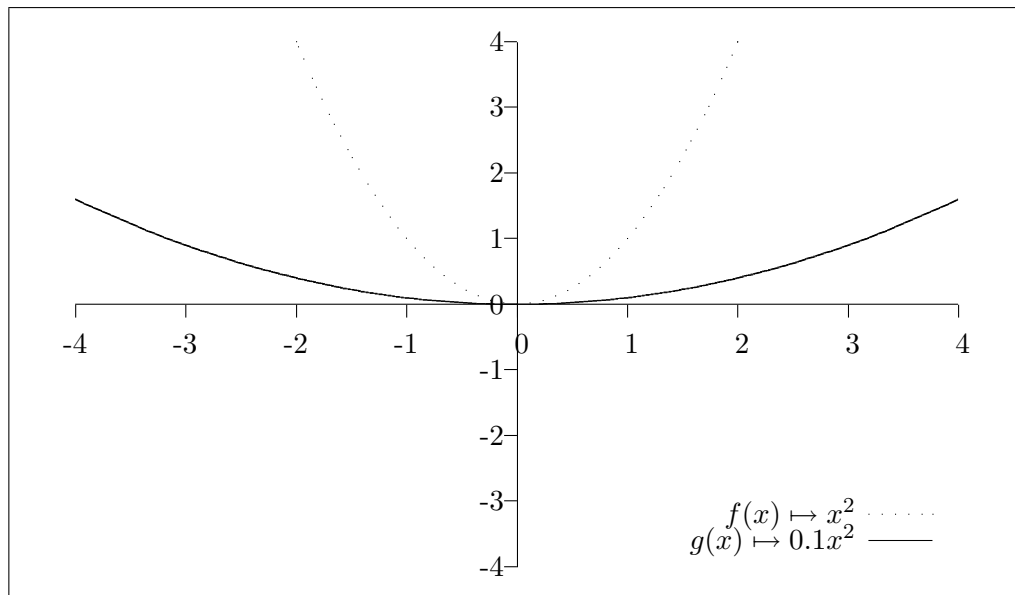
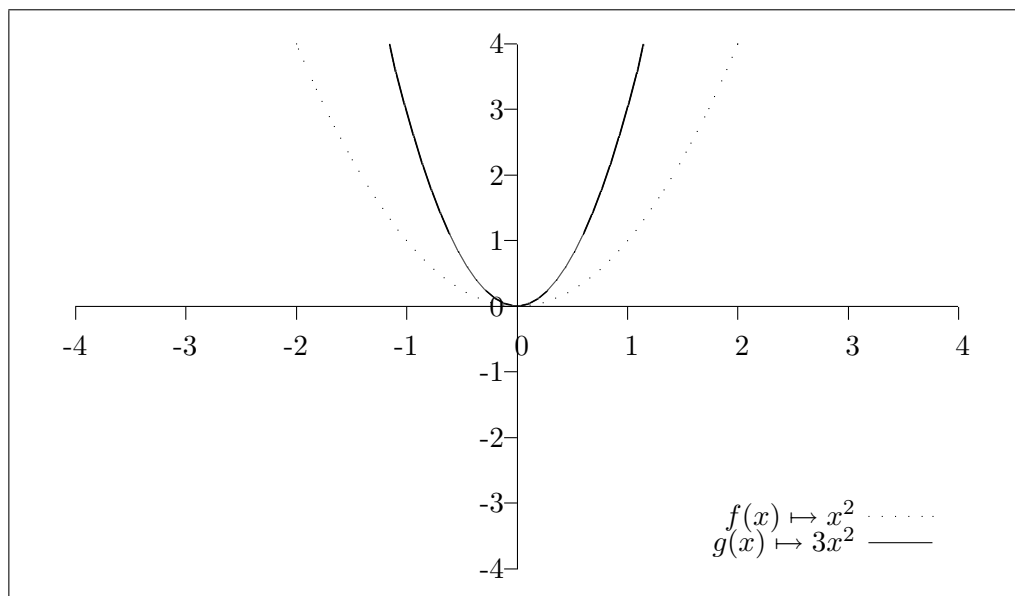


Abbildung 2: Funktion  $f(x) = ax^2$ ,  $a > 0 \wedge |a| < 1$

$|a| > 1$  Die Parabel ist steiler als die Grundparabel (Abbildung 3).

Abbildung 3: Funktion  $f(x) = ax^2$ ,  $a > 0 \wedge |a| > 1$ **2.2.2**  $a < 0$ 

Funktionen der Form  $f(x) = ax^2$  mit negativem  $a$  sind an der x-Achse gespiegelt, sind also nach unten geöffnet. Es gilt aber dabei wieder  $|a|$  zu beachten.

$|a| < 1$  Die Parabel ist an der x-Achse gespiegelt und flacher als die Grundparabel (Abbildung 4 auf der nächsten Seite).

$|a| > 1$  Die Parabel ist an der x-Achse gespiegelt und steiler als die Grundparabel (Abbildung 5 auf der nächsten Seite).

**2.3 Allgemeine quadratische Funktion**

Die Gleichung der allgemeinen quadratischen Funktion lautet:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0; b, c \in \mathbb{R} \quad (11)$$

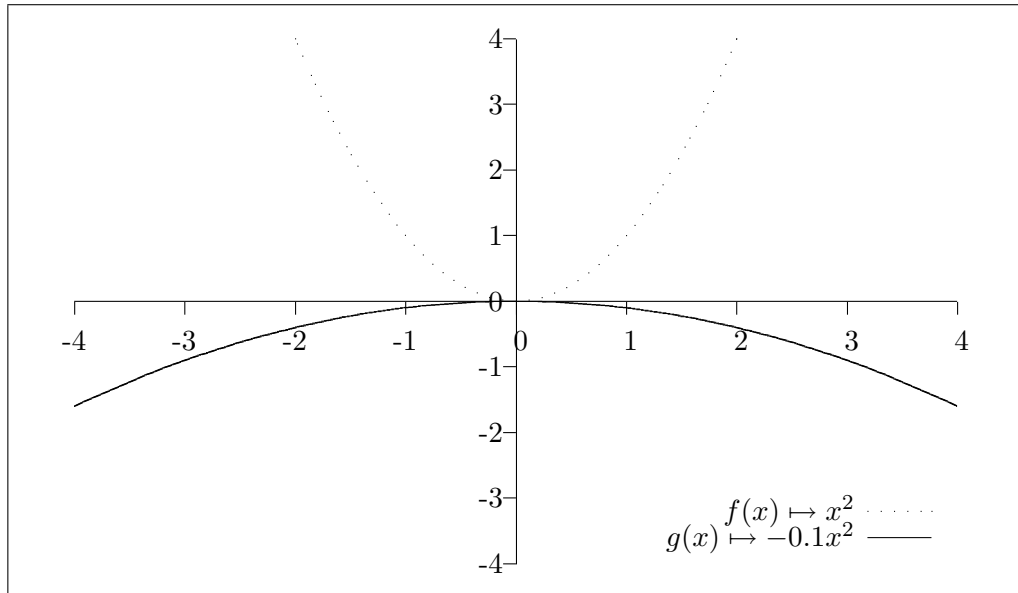
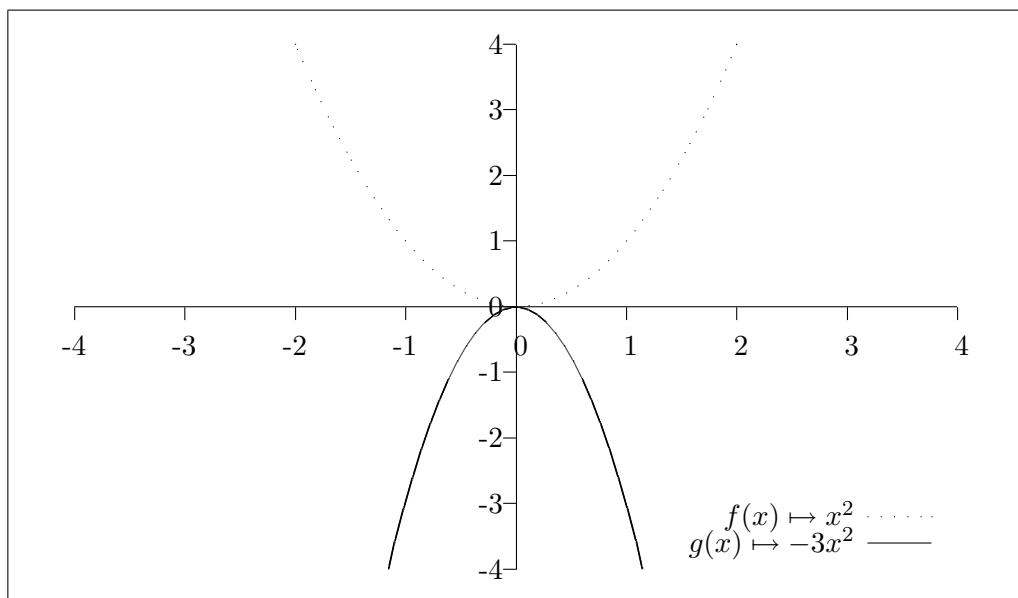
Wobei

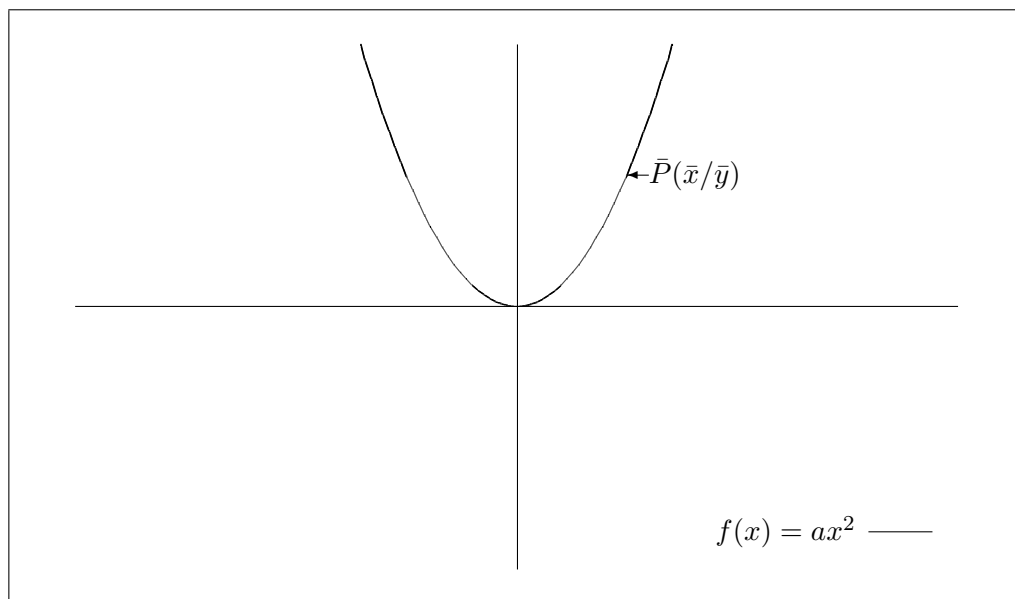
$ax^2$  das quadratische Glied,

$bx$  das lineare Glied und

$c$  das Absolutglied

ist.

Abbildung 4: Funktion  $f(x) = ax^2$ ,  $a < 0 \wedge |a| < 1$ Abbildung 5: Funktion  $f(x) = ax^2$ ,  $a < 0 \wedge |a| > 1$

Abbildung 6: Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2$ 

## 2.4 Parallelverschiebung einer Parabel

Die *Gleichung der Parabel*, die den Scheitel  $S(u/v)$  hat und durch Parallelverschiebung aus der Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2$  hervorgeht, lautet

$$y - v = a(x - u)^2 \quad (12)$$

Sie wird die *Verschiebungsform* der Parabelgleichung genannt.

Durch Parallelverschiebung einer Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2$  erhält man eine Parabel mit der allgemeinen quadratischen Funktionsgleichung:

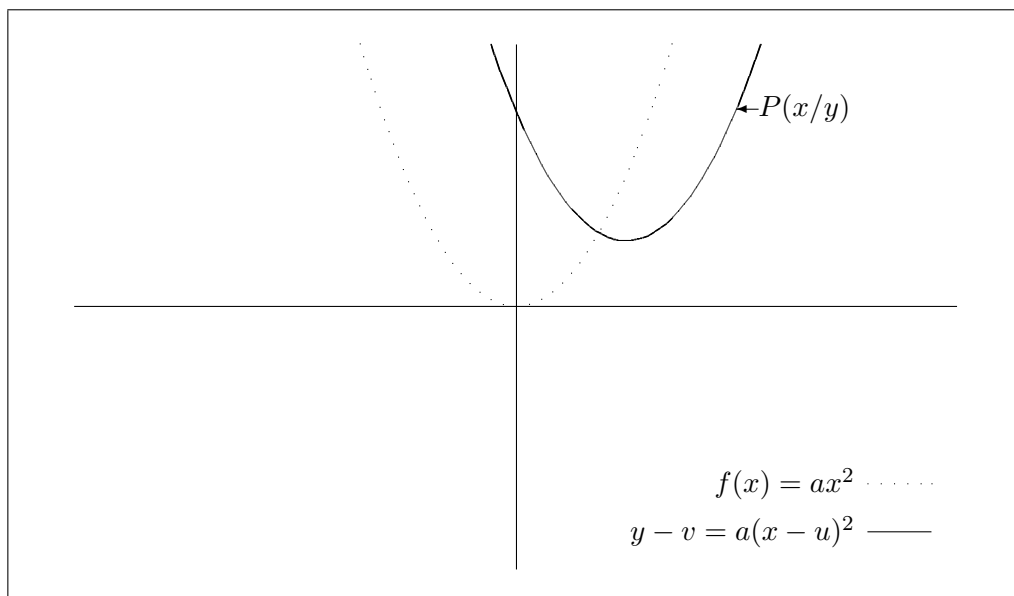
$$y = ax^2 + bx + c.$$

Gegeben sei die Parabel mit der Gleichung (Abbildung 6)

$$y = ax^2. \quad (13)$$

Diese Parabel soll nun um  $v$  Einheiten nach oben und um  $u$  Einheiten nach rechts verschoben werden, so dass ihr Scheitel auf dem Punkt  $S(u/v)$  zu liegen kommt.

Um die Verschiebung zu erreichen kann ein beliebiger Punkt  $P(x/y)$  auf der verschobenen Parabel gewählt werden (siehe Abbildung 7). Dieser

Abbildung 7: Parabel mit der Gleichung  $y - v = a(x - u)^2$ 

Punkt ist durch die Parallelverschiebung aus dem Punkt  $\bar{P}(\bar{x}/\bar{y})$  hervorgegangen (Abbildung 6 auf der vorherigen Seite). Da sich die x-Koordinate eines Punktes bei Verschiebung um  $u$  Einheiten nach rechts um  $u$  vergrößert, gilt

$$x = \bar{x} + u \quad | -u \quad (14)$$

$$x - u = \bar{x}. \quad (15)$$

Analoges gilt für die y-Koordinate

$$y = \bar{y} + v \quad | -v \quad (16)$$

$$y - v = \bar{y}. \quad (17)$$

Da  $\bar{P}(\bar{x}/\bar{y})$  auf der Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2$  (Abbildung 6 auf der vorherigen Seite) liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichung (13), d.h. es gilt

$$\bar{y} = a\bar{x}^2.$$

Ersetzen wir nun  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  gemäss der obigen Gleichung (15) und (17), so erhalten wir:

$$y - v = a(x - u)^2. \quad (18)$$

Um auf die Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  zu kommen, multiplizieren wir die Gleichung (18) aus:

$$\begin{aligned} y - v &= a(x - u)^2 \\ y - v &= a(x^2 - 2ux + u^2) \\ y - v &= ax^2 - 2aux + au^2 \quad | +v \\ y &= ax^2 - 2aux + au^2 + v \\ y &= ax^2 + (-2au)x + (au^2 + v) \end{aligned}$$

wobei  $(-2au)x$  das lineare Glied und  $(au^2 + v)$  das Absolutglied darstellt.

## 2.5 Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion ist eine Parabel

Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

ist eine Parabel, die *kongruent* ist zur Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2$ . Der Graph entsteht durch Parallelverschieben dieser Parabel.

Wir bringen die Funktionsgleichung

$$y = ax^2 + bx + c$$

durch Äquivalenzumformung auf die Verschiebungsform

$$y - v = a(x - u)^2$$

Dies geschieht durch quadratische Ergänzung (siehe Kapitel 1.2.1 auf Seite 3).

$$\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c && | -c \\
y - c &= ax^2 + bx && |: a \\
\frac{y - c}{a} &= x^2 + \frac{b}{a}x && | + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} \\
\frac{y - c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \\
\frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \\
\frac{1}{4a^2}y - \frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 && |: \frac{1}{4a^2} \\
y - 4ac + b^2 &= 4a^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \\
y + (-4ac + b^2) &= 4a^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2
\end{aligned}$$

Dabei ist  $v = (-4ac + b^2)$  und  $u = \frac{b}{2a}$ .

### 2.5.1 Sonderfälle

**Sonderfall 1** Der Graph der quadratischen Funktion

$$x \mapsto a(x - u)^2$$

ist eine Parabel mit dem Scheitel  $S(u/0)$  auf der x-Achse. Sie entsteht durch *Horizontalverschiebung* der Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2$ .

**Sonderfall 2** Der Graph der quadratischen Funktion ohne lineares Glied

$$x \mapsto ax^2 + c$$

ist eine Parabel mit dem Scheitel  $S(0/c)$ . Sie entsteht durch *Vertikalverschiebung* der Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2$ .

## 2.6 Das Extremum einer quadratischen Funktion

Für  $a > 0$  hat die quadratische Funktion

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

ein *Minimum*, d.h. einen kleinsten Funktionswert. Das Minimum liegt bei  $x = u$  und hat den Wert  $y = v$ ; dabei sind  $u$  und  $v$  die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel.

Für  $a < 0$  hat die quadratische Funktion

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

ein *Maximum*, d.h. einen grössten Funktionswert. Das Maximum liegt an der Stelle  $x = u$  und hat den Wert  $y = v$ ; dabei sind  $u$  und  $v$  die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel

Jede quadratische Funktion

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

hat an einer gewissen Stelle  $u$  ein Extremum und zwar für

$a < 0$  ein Maximum, für

$a > 0$  ein Minimum.

Dem Extremum entspricht grafisch der

**tiefste** Punkt der nach *oben* geöffneten Parabel ( $a > 0$ ) bzw. der

**höchste** Punkt der nach *unten* geöffneten Parabel ( $a < 0$ ).

Ausgehend von

$$y = ax^2 + bx + c$$

Verschiebungsform

$$y - v = a(x - u)^2$$

$y$  isolieren

$$y = a(x - u)^2 + v$$

können zwei Fälle  $a > 0$  und  $a < 0$  unterschieden werden.

### 2.6.1 Fall $a > 0$

Für  $a > 0$  und  $x = u$  ergibt sich der Funktionswert  $y = v$ . Für  $a > 0$  und  $x \neq u$  ist der Funktionswert  $y = a(x - u)^2 + v$  stets grösser als  $v$ , denn es wird ja die positive Zahl  $a(x - u)^2$  dazu addiert.

Als Beispiel dient die Funktion

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 1. \tag{19}$$

Wenn in der Funktion (19)  $x = -0.5$  ist, so ist der Funktionswert  $f(x) = 0.5$ , was dem Minimum entspricht, denn für jeden Wert  $x \neq -0.5$  ist  $f(x) > 0.5$  (Siehe Tabelle 1 auf der nächsten Seite). Diese Werte können rechnerisch ermittelt werden, indem der Scheitel der Parabel berechnet wird.

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
-5	41	-1.5	2.5	2	13
-4.5	32.5	-1	1	2.5	18.5
-4	25	<b>-0.5</b>	<b>0.5</b>	3	25
-3.5	18.5	0	1	3.5	32.5
-3	13	0.5	2.5	4	41
-2.5	8.5	1	5	4.5	50.5
-2	5	1.5	8.5	5	61

Tabelle 1: Extremum Beispiel (Minimum)

### 2.6.2 Fall $a < 0$

In diesem Fall ist die Parabel der Funktion  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  nach unten geöffnet und der Scheitel der Parabel stellt das Maximum der Funktion dar.

## 2.7 Gleichungen und Funktionen

### 2.7.1 Quadratische Gleichung und quadratische Funktion

Die allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hat zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung, je nachdem, ob der Graph der entsprechenden quadratischen Funktion:

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

die x-Achse schneidet, berührt oder meidet.

Die Frage nach den Lösungen der Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0, \{b, c\} \in \mathbb{R}$$

ist gleichbedeutend mit der Frage nach den *Nullstellen* der zugehörigen quadratischen Funktion:

$$x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

**Fall 1** Der Graph schneidet die x-Achse in zwei verschiedenen Punkten (Abbildung 8 auf der nächsten Seite): die Funktion hat genau zwei Nullstellen, d.h. die Gleichung hat zwei Lösungen. Es gilt:

$$(D = b^2 - 4ac) > 0$$

die Nullstellen entsprechen den Lösungen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

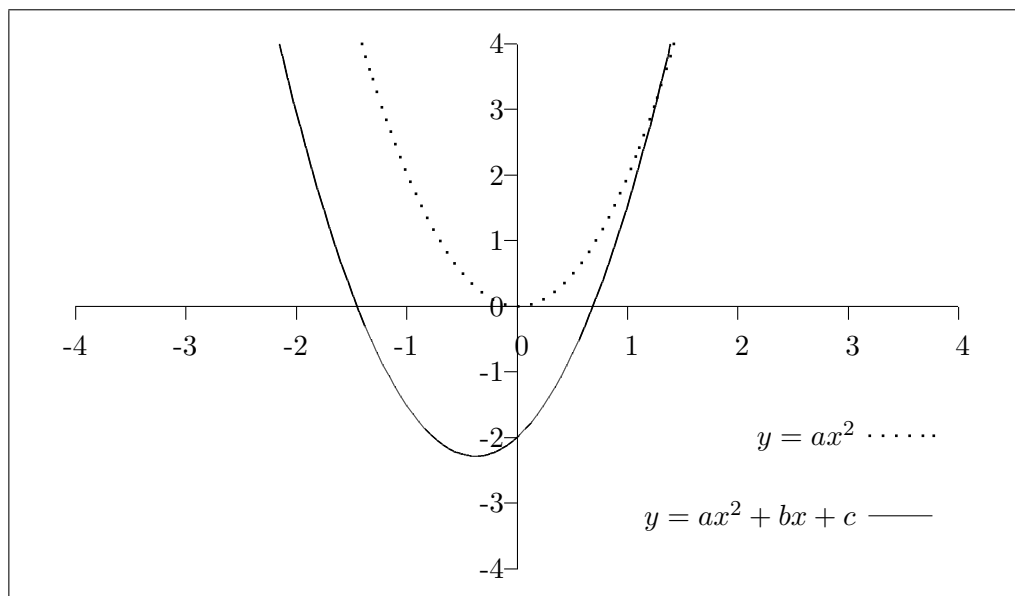


Abbildung 8: Graph schneidet die x-Achse in zwei Punkten

**Fall 2** Der Graph berührt die x-Achse (Abbildung 9 auf der nächsten Seite): die Funktion hat genau eine Nullstelle, bzw. die Gleichung hat genau eine Lösung. Es gilt:

$$(D = b^2 - 4ac) = 0$$

die Nullstelle entspricht der Lösung

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

**Fall 3** Der Graph meidet die x-Achse (Abbildung 10 auf der nächsten Seite): es existiert keine Nullstelle und keine Lösung. Es gilt:

$$(D = b^2 - 4ac) < 0$$

## 2.8 Extremwertaufgaben

### 2.8.1 Einfache Berechnung des Parabelscheitels

Der Scheitel  $S(u/v)$  der Parabel mit der Gleichung

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0, b \neq 0$$

hat die gleiche Abszisse<sup>1</sup> wie der Scheitel der vertikal verschobenen Parabel mit der Gleichung

$$y = ax^2 + bx,$$

<sup>1</sup>Abszisse ist die x-Achse, Ordinatenachse die y-Achse.

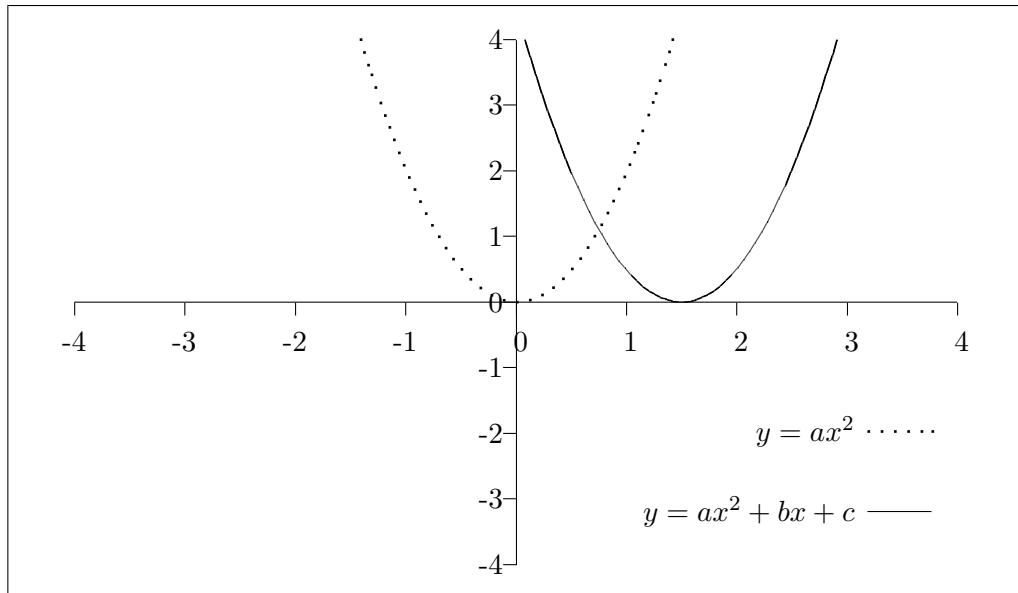


Abbildung 9: Graph berührt die x-Achse

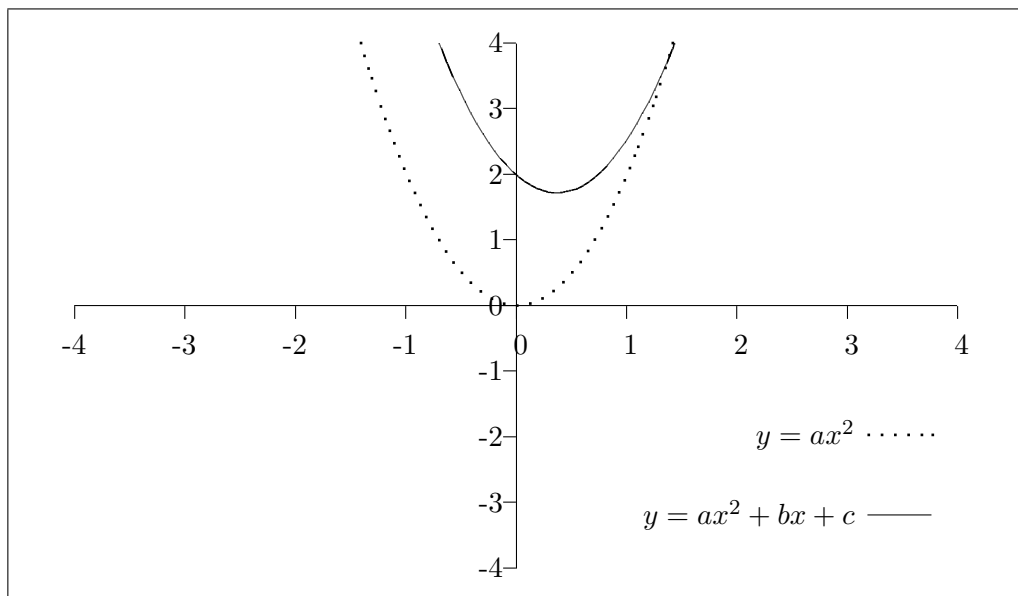


Abbildung 10: Graph meidet die x-Achse

die durch den Ursprung geht.  $S(u/v)$  ergibt sich daher wie folgt:

- Die Gleichung

$$ax^2 + bx = 0$$

hat neben  $x_1 = 0$  eine von 0 verschiedene Lösung  $x_2$ .

- Die Scheitelabszisse  $u$  ist die Hälfte dieser Lösung.
- Die Scheitelordinate  $v$  erhält man durch Einsetzen von  $x = u$  in die ursprüngliche Parabelgleichung:

$$v = au^2 + bu + c$$

### 2.8.2 Lösungsschema Extremwertaufgaben

Eine Extremwertaufgabe mit quadratischer Funktionsgleichung kann nach folgendem Schema gelöst werden:

**Wahl der Variablen:** Man wählt alle Hilfsvariablen  $u$ , von der die Grösse  $y$ , die extremal sein soll, abhängt.

**Definitionsbereich:** Man untersucht den Bereich, in dem die Hilfsvariablen variieren können.

**Nebenbedingungen:** Durch diese können die eingeführten Hilfsvariablen durch  $x$  ausgedrückt werden.

**Funktionsgleichung mit einer einzigen unabhängigen Variablen:** Da die Hilfsvariablen durch  $x$  ausgedrückt werden, kann man auch  $y$  durch  $x$  allein ausdrücken.

$$x \mapsto y$$

**Extremum:** Falls die Funktion  $x \mapsto y$  quadratisch ist, bestimmt man den Scheitel  $S(u/v)$  ihres Graphen. Der Funktionswert wird extremal (maximal oder minimal) an der Stelle  $u$ ; der Wert des Extremums ist  $v$ .

**Kontrolle:** Liegt  $u$  im Definitionsbereich?

### 3 Anwendung der quadratischen Gleichung und Funktionen

#### 3.1 Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen

##### 3.1.1 Lösung durch Faktorzerlegung

Eine Gleichung beliebigen Grades und mit fehlendem Absolutglied kann evtl. gelöst werden, indem sie durch Ausklammern auf die Form

$$\text{'Produkt} = 0'$$

gebracht wird. Auf keinen Fall darf sie durch  $x$  oder eine Potenz von  $x$  dividiert werden, da sonst evtl. eine oder sogar mehrere Lösungen verloren gehen.

Weil ein Produkt genau dann gleich Null wird, wenn mindestens einer seiner Faktoren gleich Null ist, hat man die einzelnen Faktoren gleich Null zu setzen und die entstehenden Gleichungen aufzulösen.

Die erhaltenen Lösungen sind die Lösungen der Ausgangsgleichung.

##### 3.1.2 Die biquadratische Gleichung

Die *biquadratische Gleichung*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \tag{20}$$

kann durch die Substitution

$$u = x^2$$

auf die (gewöhnliche) quadratische Gleichung

$$au^2 + bu + c = 0$$

zurückgeführt werden.

### 3.2 Wurzelgleichungen

#### 3.2.1 Das Quadrieren

In einfachen Wurzelgleichungen kann der Wurzelterm durch Quadrieren der beiden Seiten der Gleichung eliminiert werden. Das Quadrieren einer Gleichung ist jedoch *keine Äquivalenzumformung*: Die Lösungsmenge kann sich vergrößern. Die nachträgliche Probe ist daher unerlässlich.

### 3.2.2 Kompliziertere Wurzelgleichungen

Beim Auflösen einer Gleichung, die genau einen Wurzelausdruck enthält, ist folgendermassen vorzugehen:

1. Wurzelterm isolieren.
2. Gleichung quadrieren.
3. Quadrierte Gleichung auflösen.
4. Mit den berechneten Lösungen die Probe machen um evtl. hinzugekommene Lösungen auszuschalten.

### 3.3 Gleichungssysteme mit quadratischen Gleichungen

#### 3.3.1 Anwendung der Einsetzungs- und der Additionsmethode

Einfache Gleichungssysteme mit quadratischen Gleichungen können evtl. aufgelöst werden, indem mit Hilfe der Einsetzungsmethode oder der Additionsmethode eine Variable eliminiert wird.

- Wenn eine der Gleichungen *linear* ist, so kann eine Variable sicher mit der Einsetzungsmethode eliminiert werden.
- Wenn die eine Gleichung des Systems nicht ein Vielfaches der anderen ist, so hat ein solches System im Maximum vier verschiedene *Zahlenpaare* als Lösung.

## A Quadratische Gleichungen

### A.1 Reinquadratische Gleichung

Die reinquadratische Gleichung

$$x^2 = d$$

besitzt in Bezug auf die Grundmenge  $\mathbb{R}$

- zwei Lösungen, wenn  $d > 0$ :  $L = \{\sqrt{d}, -\sqrt{d}\}$ ,
- eine Lösung, wenn  $d = 0$ :  $L = \{0\}$ ,
- keine Lösung, wenn  $d < 0$ :  $L = \emptyset$ .

Quadratische Gleichungen, in denen das lineare Glied verschwindet, heissen *reinquadratische Gleichungen*. Sie lassen sich stets auf die Form

$$x^2 = d \tag{21}$$

bringen.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0, & a \neq 0, b = 0 \\ ax^2 + c &= 0 \end{aligned}$$

Umformung:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 & | -c \\ ax^2 &= -c & | : a \\ x^2 &= -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

somit ist  $x^2 = d$ , wobei  $d = -\frac{c}{a}$ .

#### A.1.1 Lösungsmengen

Fall  $d > 0$

$$\mathbf{L} = \{\sqrt{d}, -\sqrt{d}\} \tag{22}$$

Es sei  $d = (\sqrt{d})^2$

$$x^2 = (\sqrt{d})^2$$

$$x^2 = \sqrt{d}^2$$

$$x^2 - \sqrt{d}^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0$$

$$x - \sqrt{d} = 0 \quad \vee \quad x + \sqrt{d} = 0$$

$$x = \sqrt{d} \quad \vee \quad x = -\sqrt{d}$$

somit ist  $\mathbf{L} = \{\sqrt{d}, -\sqrt{d}\}$ .

**Fall**  $d = 0$

$$\boxed{\mathbf{L} = \{\mathbf{0}\}} \tag{23}$$

Es sei  $d = 0$

$$x^2 = 0$$

somit ist  $\mathbf{L} = \{\mathbf{0}\}$ .

**Fall**  $d < 0$

$$\boxed{\mathbf{L} = \emptyset} \tag{24}$$

Es sei z.B.  $d = -4$

$$x^2 = -4$$

$$x = \sqrt{-4}$$

somit ist  $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ .

## A.2 Gleichung der Form $(x + k)^2 = d$

Eine quadratische Gleichung der Form

$$(x + k)^2 = d$$

kann gelöst werden, indem sie durch die *Substitution*

$$u = x + k$$

auf die reinquadratische Gleichung

$$u^2 = d$$

zurückgeführt wird.

Die ursprüngliche Gleichung hat also zwei Lösungen, eine oder keine Lösung, je nachdem  $d > 0$ ,  $d = 0$  oder  $d < 0$  ist.

Die Gleichung  $(x+k)^2 = d$  kann nicht auf die Form  $x^2 = d$  gebracht werden (ausgehend von  $d = -\frac{c}{a}$ ):

$$\begin{aligned} (x+k)^2 &= x^2 + 2xk + k^2 \\ \Rightarrow 2xk &\neq 0, \text{ wenn } k \neq 0 \wedge x \neq 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung kann durch *Substitution* gelöst werden:

$$(x+k)^2 = d \tag{25}$$

$$(x+k) = u \quad | \text{ Substitution} \tag{26}$$

$$u^2 = d \tag{27}$$

$$u = \sqrt{d} \quad \vee \quad u = -\sqrt{d} \tag{28}$$

$$(x+k) = \sqrt{d} \quad \vee \quad (x+k) = -\sqrt{d} \quad | -k \tag{29}$$

$$x = -k + \sqrt{d} \quad \vee \quad x = -k - \sqrt{d} \tag{30}$$

Die Gleichung (26) heisst *Substitutionsgleichung*.

### A.3 Zerlegung von quadratischen Polynomen

Jedes *quadratische Polynom*

$$ax^2 + bx + c$$

mit  $D > 0$  kann in *Linearfaktoren* zerlegt werden

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

wobei  $x_1, x_2$  die Lösungen der Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sind.

*Beweis:*

Zerlegung von

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c \\ \Rightarrow ax^2 + bx + c &= 0 \quad D > 0 \\ \Rightarrow x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \quad \vee \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &\Rightarrow -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \quad | : -1 \quad \vee \quad \frac{c}{a} = x_1x_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{x_1 + x_2}{-1} = -(x_1 + x_2) \quad \vee \quad \frac{c}{a} = x_1x_2 \end{aligned}$$

ersetzen von  $\frac{b}{a}$  und  $\frac{c}{a}$  durch  $-(x_1 + x_2)$  bzw.  $x_1x_2$

$$\begin{aligned} &= a [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \\ &= a [x^2 - (x_1x + x_2x) + x_1x_2] \\ &= a [x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

## B Quadratische Funktionen

### B.1 Der Graph als Superposition von Parabel und Gerade

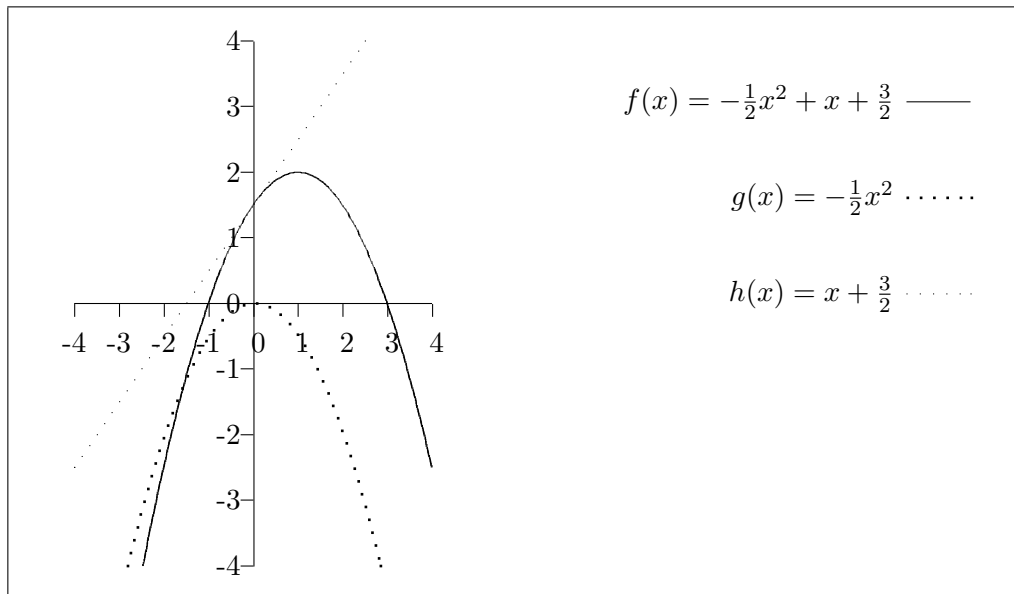


Abbildung 11: Superposition

Um den Graphen der Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (31)$$

zu zeichnen, kann man ihn in

$$g(x) = ax^2 \quad (32)$$

und

$$h(x) = bx + c \quad (33)$$

zerlegen und die Graphen dieser zwei neuen Funktionen in das gleiche Koordinatensystem zeichnen (Abbildung 11).

Um nun den Graphen der Funktion (31) zu erhalten, werden die Werte der Funktionen (32) und (33) superponiert. Dies geschieht durch Addition möglichst vieler Funktionswerte dieser Funktionen.

Als Beispiel dient die Funktion  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ . Die Tabelle 2 auf der nächsten Seite zeigt die dabei auftretenden Werte.

$x$	$g(x) = -\frac{1}{2}x^2$	$h(x) = x + \frac{3}{2}$	$g(x) + h(x)$	$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$
-4	-8	-2.5	-10.5	-10.5
-3	-4.5	-1.5	-6	-6
-2	-2	-0.5	-2.5	-2.5
-1	-0.5	0.5	0	0
0	0	1.5	1.5	1.5
1	-0.5	2.5	2	2
2	-2	3.5	1.5	1.5
3	-4.5	4.5	0	0
4	-8	5.5	-2.5	-2.5

Tabelle 2: Superposition

**Literatur**

- [AA112] Dr. Paul Streckeisen und Otto M. Keiser, *Die quadratische Gleichung*, Algebra und Analysis, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, ISBN 3-7155-0694-6
- [AA201] Dr. Heinz Bachmann und Otto M. Keiser, *Die quadratische Funktion*, Algebra und Analysis, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, ISBN 3-7155-0616-4
- [AA202] Dr. Heinz Bachmann und Otto M. Keiser, *Anwendung der quadratischen Gleichungen und Funktionen*, Algebra und Analysis, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, ISBN 3-7155-0606-7
- [MathematikI] Schülerduden, *Die Mathematik I*, 5., neu bearbeitete Auflage, 1990, Dudenverlag, Mannheim, ISBN 3-411-04205-2

## Index

- Axialsymmetrie, 10
- Diskriminante, 4
- Extremum, 18
  - Maximum, 18
  - Minimum, 17
- Funktionsgleichung
  - allgemein quadratische, 14
- Gleichung
  - reinquadratische, 25
- Glied
  - Absolut-, 12
  - absolute, 3
  - lineares, 3
  - quadratisches, 3
- Grundparabel
  - quadratische, 10
- Linearfaktoren, 27
- Nullstellen, 19
- Parabel
  - scheitel, 20
  - Parallelverschiebung, 14
- Substitution, 3, 26
  - gleichung, 27
- Superposition, *siehe* supponieren
- supponieren, 29
- Ursprung, *siehe* Scheitel
- Verschiebung
  - Horizontal-, 17
  - Vertikal-, 17
- Verschiebungsform, 14, 16
- Vieta
  - Satz von, 7
- Zerlegung
  - quadratisches Polynom, 27