Zusammenfassung Potenzen und Wurzeln / Exponential- und Logarithmusfunktionen

Rafael Ostertag

2005-06-13

Zusammenfassung

Das vorliegende Dokument fasst die Akad Lernhefte [AA203] und [AA204] zusammen.

Im Anhang sind alle Kurven die mit Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen im Zusammenhang stehen nochmals separat aufgeführt.

Inhaltsverzeichnis

I Potenzen und Wurzeln **4**

1 Potenzgesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten **4**
1.1 Beweise 4

2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten **6**
2.1 Der Exponent 0 6
2.2 Negative Exponenten 6
2.3 Die Potenzgesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten 7
2.3.1 Beispiele 7
2.3.2 Spezialfall 8

3 Wurzeln **9**
3.1 Die Wurzelgesetze 9
3.1.1 Wurzeln von Produkten und Quotienten 9
3.1.2 Teilweises Radizieren 9
3.1.3 Potenzen und Wurzeln 10
3.1.4 Wurzel einer Wurzel 10
3.1.5 Kürzen und Erweitern von Wurzelexponenten 10
3.2 Die binomische Gleichung 11
3.2.1 Gerades n 11
3.2.2 Ungerades n 11

4 Potenzen mit rationalen Exponenten **13**
4.1 Die Potenzgesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten . 13

II Potenz- und Exponentialfunktionen **14**

5 Die Potenzfunktionen **14**
5.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten 14
5.1.1 Gerade Funktionen 16
5.1.2 Ungerade Funktionen 16
5.2 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten 16
5.3 Potenzfunktionen mit beliebigen rationalen Exponenten . . . 18

6 Die Wurzelfunktionen **20**
6.1 Die Quadratwurzelfunktion 20
6.1.1 Die Quadratwurzelfunktion als Umkehrung der Quadratfunktion 21
6.1.2 Die allgemeine Wurzelfunktion 22

7 Exponentialfunktionen **24**
7.1 Die Exponentialfunktion zur Basis 2 24
7.2 Die allgemeine Exponentialfunktion 25
7.2.1 Exponentialfunktionen mit Basen grösser als 1 25
7.2.2 Exponentialfunktionen mit Basen zwischen 0 und 1 . . 25
7.2.3 Zusammenfassung 26
7.2.4 Die natürliche Exponentialfunktion 26
7.3 Die Exponentialfunktion $x \mapsto b \cdot a^x$ 27
7.3.1 Der Graph von $x \mapsto b \cdot a^x$ 27
7.3.2 Die Grundeigenschaft der Exponentialfunktion 28
7.4 Anwendungen der Exponentialfunktionen 29

III Logarithmen und Exponentialgleichungen **30**

8 Logarithmusfunktionen **30**
8.1 Die Logarithmusfunktion zur Basis 2 30
8.1.1 Definition des Logarithmus zur Basis 2 30
8.1.2 Die Logarithmusfunktion zur Basis 2 31
8.2 Die allgemeine Logarithmusfunktion 32
8.2.1 Die allgemeine Definition des Logarithmus 32
8.2.2 Der Graph der allgemeinen Logarithmusfunktion . . . 32
8.2.3 Natürliche und dekadische Logarithmen 33
8.3 Der Basiswechselsatz 34
8.4 Die Logarithmusgesetze 35
8.4.1 Der Logarithmus eines Produktes 35
8.4.2 Der Logarithmus eines Quotienten 36
8.4.3 Der Logarithmus einer Potenz (Wurzel) 36
8.5 Anwendung der Logarithmusgesetze 37
8.5.1 Anwendung der Logarithmusgesetze auf Logarithmusgleichungen 37

9 Exponentialgleichungen **38**
9.1 Auflösen einfacher Exponentialgleichungen ohne Logarithmieren 38
9.2 Auflösung von Exponentialgleichungen mit Logarithmieren . 39

IV Anhang **40**

A Kurven im Überblick **40**
A.1 Potenzfunktionen 40
A.2 Exponentialfunktionen 43
A.3 Logarithmusfunktionen 44

Literatur **46**

Abbildungsverzeichnis

1 Die binomische Gleichung: n gerade 11
2 Die binomische Gleichung: n ungerade 12
3 Potenzen mit geraden Exponenten 14
4 Potenzen mit ungeraden Exponenten 15
5 Potenzen mit ungeraden, negativen Exponenten 16
6 Potenzen mit geraden, negativen Exponenten 18
7 Potenzen mit rationalen Exponenten 19
8 Graph der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ 20
9 Quadratwurzelfunktion als Umkehrung der Quadratfunktion . 21
10 Wurzelfunktion als Umkehrung der Potenzfunktion 23
11 Graph der Exponentialfunktion $x \mapsto 2^x$ 24
12 Exponentialfunktionen mit Basis grösser 1 25
13 Exponentialfunktionen mit Basis zwischen 0 und 1 26
14 Die natürliche Exponentialfunktion 27
15 Graph der Exponentialfunktion $x \mapsto b \cdot a^x$ 28
16 Graphische Lösung der Gleichung $2^x = b$ 30
17 Zeichnen der Logarithmusfunktion zur Basis 2 durch Spiegeln der Exponentialfunktion 31
18 Graphische Lösung der Gleichung $2^x = b$ 32
19 Zeichnen der Logarithmusfunktion durch Spiegeln der Exponentialfunktion 33
20 Basiswechselsatz 34
21 Gerade Potenzfunktionen $y = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ 40
22 Ungerade Potenzfunktionen $y = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ 41
23 Gerade Potenzfunktionen $y = x^{-z} = \frac{1}{n} \quad (z \in \mathbb{Z})$ 41
24 Ungerade Potenzfunktionen $y = x^{-z} = \frac{1}{n} \quad (z \in \mathbb{Z})$ 42
25 Wurzelfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ 42
26 Exponentialfunktionen $y = a^x \quad (a > 1)$ 43
27 Exponentialfunktionen $y = a^x \quad (0 < a < 1)$ 44
28 Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$ 45

Teil I
Potenzen und Wurzeln

1 Potenzgesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten

Für beliebige reelle Zahlen a, b und beliebige natürliche Zahlen m, n gelten die Gesetze:

I a)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{1}$$

I b)

$$\frac{a^m}{a^n} = \left\{ \begin{array}{ll} a^{m-n} & \text{für } m > n \\ 1 & \text{für } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{für } m < n \end{array} \right\} \text{und } (a \neq 0) \tag{2}$$

II a)

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \tag{3}$$

II b)

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \qquad (b \neq 0) \tag{4}$$

III

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{5}$$

1.1 Beweise

I a)

$$a^m \cdot a^{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}$$

I b)

$m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}^{n \text{ Faktoren}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m-n \text{ Faktoren}}}^{m \text{ Faktoren}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{n \text{ Faktoren}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{m-n \text{ Faktoren}} = a^{m-n}$$

$m = n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\cancel{a}\cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}^{m \text{ Faktoren}}}{\underbrace{\cancel{a}\cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{n \text{ Faktoren}}} = 1$$

$m < n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ Faktoren}}} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

II a)

$$a^m \cdot b^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ Faktoren}} = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{m \text{ Faktoren } ab} = (ab)^m$$

II b) $b \neq 0$

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ Faktoren}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{m \text{ Faktoren}} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

III

$$(a^m)^n = \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}}}^{n \text{ Faktoren}} =$$

$$\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}}^n = a^{mn}$$

2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Durch die Definition

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } a \neq 0$$

wird die Definition der Potenz auf beliebige ganzzahlige Exponenten ausgedehnt, wobei die Potenzgesetze I bis II [dabei Ib) in der Form $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$] auch für diese allgemeinen Potenzen gelten.

Im Abschnitt 1 auf Seite 4 wird beim Potenzgesetz I b) eine Fallunterscheidung gemacht, welche sich erübrigt, wenn $m, n \in \mathbb{Z}$. Dies führt dazu, dass die Zahl Null, sowie negative Zahlen als Exponenten verwendet werden können.

2.1 Der Exponent 0

Für m und n gilt:

$$m = n$$

dann

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0$$

nach Ib):

$$\frac{a^m}{a^n} = 1$$

somit ist

$$a^0 = 1$$

2.2 Negative Exponenten

Beispiel:

$$\frac{a^4}{a^6} = a^{4-6} = a^{-2}$$

nach Ib):

$$\frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^2}$$

Allgemein

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

2.3 Die Potenzgesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Die Gesetze I bis III von Abschnitt 1 auf Seite 4 gelten auch dann, wenn m und n beliebige ganze Zahlen sind, wobei Gesetz Ib) durch das vereinfachte Gesetz

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ für } a \neq 0$$

ersetzt werden darf.

2.3.1 Beispiele

Ia)

$$a^{-3} \cdot a^2 = a^{-3+2} = a^{-1}$$

denn

$$\begin{aligned} a^{-3} \cdot a^2 &= \frac{1}{a^3} \cdot a^2 \\ &= \frac{a^2}{a^3} \\ &= \frac{1}{a} \\ &= a^{-1} \end{aligned}$$

Ib)

$$\frac{a^5}{a^{-3}} = a^{5-(-3)} = a^8$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{a^5}{a^{-3}} &= \frac{a^5}{\frac{1}{a^3}} \\ &= a^5 \cdot a^3 \\ &= a^8 \end{aligned}$$

IIa)

$$a^{-4} \cdot b^{-4} = (ab)^{-4}$$

denn

$$\begin{aligned} a^{-4} \cdot b^{-4} &= \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{b^4} \\ &= \frac{1}{a^4 b^4} \\ &= \frac{1}{(ab)^4} \\ &= (ab)^{-4} \end{aligned}$$

III

$$(a^3)^{-2} = a^{3(-2)} = a^{-6}$$

denn

$$\begin{aligned} (a^3)^{-2} &= \frac{1}{(a^3)^2} \\ &= \frac{1}{a^6} \\ &= a^{-6} \end{aligned}$$

2.3.2 Spezialfall

Man kann einen Bruch mit einem negativen Exponenten potenzieren, indem man den reziproken Wert des Bruches mit dem Betrag dieses Exponenten potenziert:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \qquad (a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbb{N}) \tag{6}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} \\ &= \frac{b^n}{a^n} \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^n \end{aligned}$$

3 Wurzeln

Die *n–te Wurzel* einer nicht-negativen Zahl a (Bezeichnung: $\sqrt[n]{a}$) ist diejenige nicht-negative Zahl, deren n–te Potenz a ergibt. Die Zahl $\sqrt[n]{a}$ muss also zwei Bedingungen erfüllen:

1. $\sqrt[n]{a} \geq 0$
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

3.1 Die Wurzelgesetze

3.1.1 Wurzeln von Produkten und Quotienten

1a)

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \tag{7}$$

1b)

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \tag{8}$$

Beweis 1a) $\sqrt[n]{ab}$ ist nach Definition die einzige *nicht-negative* Zahl, deren n–te Potenz ab ergibt:

1. Es gilt $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$, weil $\sqrt[n]{a} \geq 0$ und $\sqrt[n]{b} \geq 0$.
2. Es gilt $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b$.

Beweis 1b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ist nach Definition die einzige *nicht-negative* Zahl, deren n–te Potenz $\frac{a}{b}$ ergibt:

1. Es gilt $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$, weil $\sqrt[n]{a} \geq 0$ und $\sqrt[n]{b} \geq 0$.
2. Es gilt $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$.

3.1.2 Teilweises Radizieren

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^n b} &= \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} \\ &= a \cdot \sqrt[n]{b} \end{aligned}$$

3.1.3 Potenzen und Wurzeln

2)
$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n \qquad m, n \in \mathbb{N}; a \geq 0 \tag{9}$$

Beweis $\sqrt[m]{a^n}$ ist nach Definition die einzige nicht-negative Zahl, deren m–te Potenz a^n ergibt:

1. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n \geq 0$ nach Definition der Wurzel.
2.
$$\begin{aligned}\left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^n\right)^m &= \left(\sqrt[m]{a}\right)^{n\cdot m} \\ &= \left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right)^n \\ &= a^n\end{aligned}$$

3.1.4 Wurzel einer Wurzel

3)
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a} \tag{10}$$

Beweis
$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m\cdot n} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

3.1.5 Kürzen und Erweitern von Wurzelexponenten

4)
$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m\cancel{p}]{a^{n\cancel{p}}} = \sqrt[m]{a^n} \tag{11}$$

Beweis

$$\begin{aligned}\sqrt[mp]{a^{np}} &= \sqrt[m]{\sqrt[p]{a^{np}}} \\ &= \sqrt[m]{\sqrt[p]{(a^n)^p}} \\ &= \sqrt[m]{\left(\sqrt[p]{a^n}\right)^p} \\ &= \sqrt[m]{a^n}\end{aligned}$$

3.2 Die binomische Gleichung

Es gibt ganz einfache Probleme, die auf die verallgemeinerte Gleichung

$$x^n = a \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{12}$$

führen. Eine Solche Gleichung heisst eine binomische Gleichung.

Eine binomische Gleichung kann näherungsweise grafisch gelöst werden. Dabei muss unterschieden werden, ob n gerade oder ungerade ist.

3.2.1 Gerades n

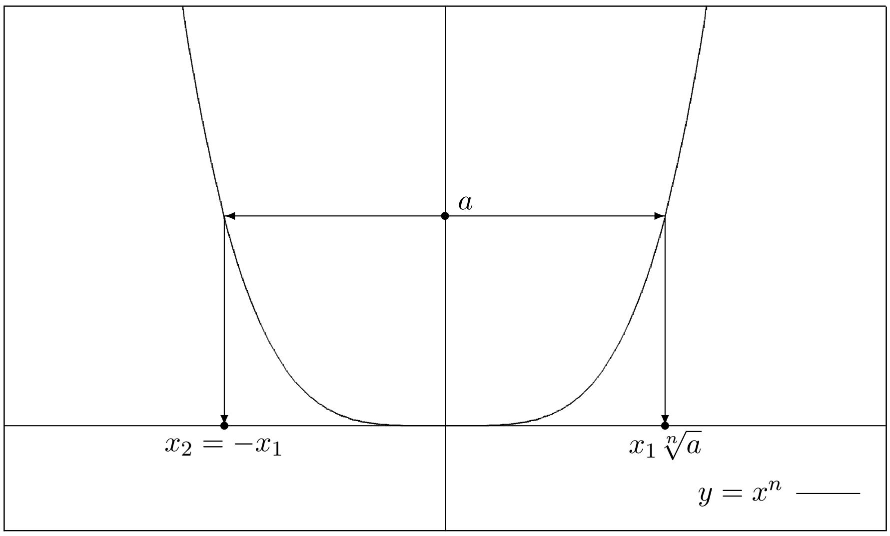

Abbildung 1: Die binomische Gleichung: n gerade

Die Gleichung $x^n = a$ mit geradem n (siehe Abbildung 1) hat

- für $a > 0$ zwei einander entgegengesetzte Lösungen:

$$x_1 = \sqrt[n]{a} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\sqrt[n]{a}, \tag{13}$$

- für $a = 0$ die eine Lösung 0,
- für $a < 0$ keine Lösung.

3.2.2 Ungerades n

Die Gleichung $x^n = a$ mit ungeradem n hat für jedes a genau eine Lösung x_1 (siehe Abbildung 2 auf der nächsten Seite), und zwar

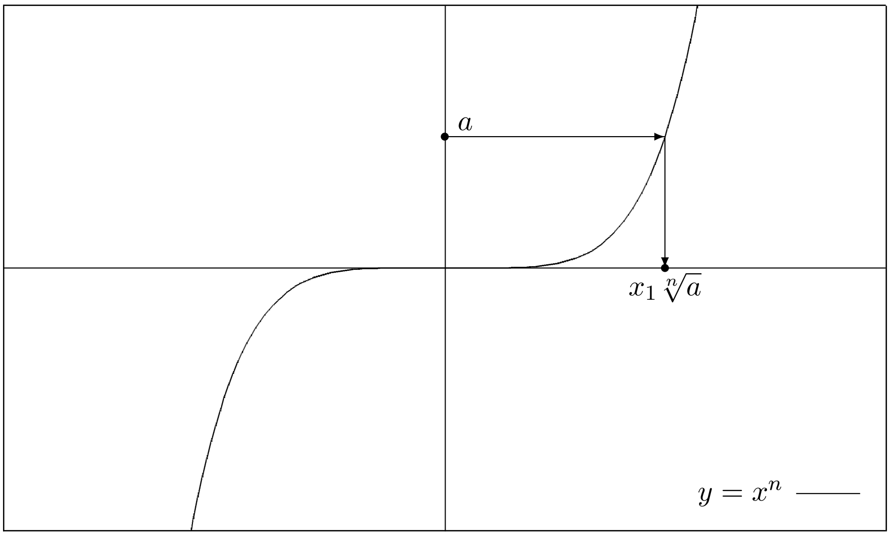

Abbildung 2: Die binomische Gleichung: n ungerade

- für $a \geq 0$:
$$x_1 = \sqrt[n]{a}, \tag{14}$$
- für $a < 0$:
$$x_1 = -\sqrt[n]{|a|}. \tag{15}$$

Die Gleichung (15) folgt aus folgender Überlegung: Wenn $a < 0$, darf x_1 nicht gleich $\sqrt[n]{a}$ sein, denn $\sqrt[n]{a}$ ist für ein negatives a nicht definiert. Nun ist wegen der Punktsymmetrie des Graphen der Funktion $x \mapsto x^n$ zum Ursprung die Lösung x_1 entgegengesetzt zur Lösung $x^n = |a|$, also ist

$$x_1 = -\sqrt[n]{|a|}$$

4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Unter $a^{\frac{m}{n}}$ verstehen wir $\sqrt[n]{a^m}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{16}$$

Dabei soll a eine beliebige *positive* Zahl sein, n eine *natürliche* und m eine *ganze* Zahl sein ($a > 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$).

Ein Minuszeichen vor einem gebrochenen Exponenten hat die gleiche Bedeutung wie vor einem natürlichen Exponenten; für natürliche Zahlen n, m gilt nämlich:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \tag{17}$$

Beweis Gleichung (17)

$$a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

4.1 Die Potenzgesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten

Für die nach der obigen Definition definierten Potenzen $a^{\frac{m}{n}}$ mit beliebigen rationalen Exponenten $\frac{m}{n}$ gelten die Potenzgesetze I bis III.

Teil II
Potenz- und Exponentialfunktionen

5 Die Potenzfunktionen

> Der Graph einer Potenzfunktion
>
> $$x \mapsto x^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
>
> (also eine Parabel n–ter Ordnung) geht durch den Ursprung und den Punkt $E(1/1)$.
> Die Kurve ist für $x \geq 0$ steigend, d.h. die Funktion ist hier *monoton wachsend.*

Eine Potenzfunktion

$$x \mapsto x^n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{18}$$

ordnet jeder reellen Zahl x ihre n–te Potenz x^n zu.

5.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

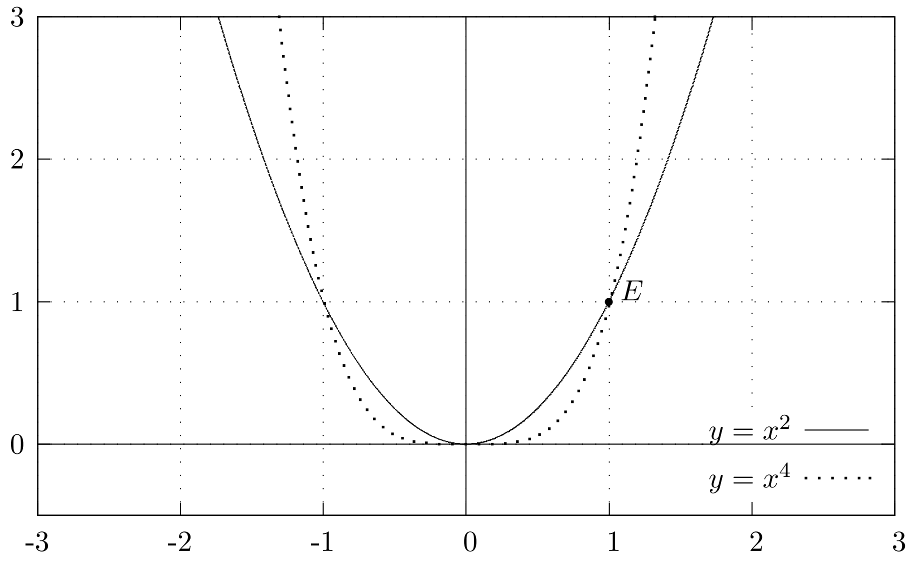

Abbildung 3: Potenzen mit geraden Exponenten

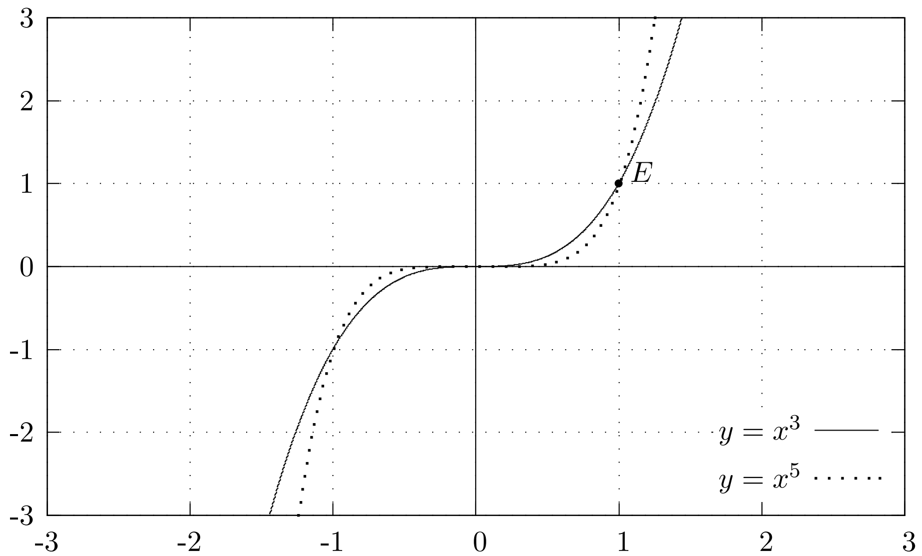

Abbildung 4: Potenzen mit ungeraden Exponenten

Die Graphen der Potenzfunktion besitzen folgende Eigenschaften (siehe dazu Abbildung 3 auf der vorherigen Seite und 4):

- Alle Kurven gehen durch den Ursprung 0(0/0) und durch den Punkt $E(1/1)$.[1]
- Je grösser der Exponent n ist, desto flacher verläuft die Kurve gegen den Ursprung hin und desto steiler verläuft sie nach aussen.
- Für $x \geq 0$ sind *alle* Kurven steigend, d.h. Potenzen mit gleichem Exponenten sind um so grösser, je grösser die *positive* Basis ist.

  In mathematischer Kurzformulierung lautet dieses Monotoniegesetz

  $$0 \leq a < b \Rightarrow a^n < b^n$$

  Man sagt dafür: Die Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ sind für $x \geq 0$ *monoton wachsend*.[2]

[1] Der Punkt E ist nicht zwingend an die Koordinate (1/1) gebunden. Er liegt z.B. bei der Potenzfunktion $x \mapsto -x^2$ auf $(-1/-1)$.

[2] Die Potenzfunktionen mit *ungeradem* Exponenten n sind sogar überall *monoton wachsend*, d.h. auch für $x \leq 0$, dagegen sind die Potenzfunktionen mit *geradem* n für $x \leq 0$ *monoton fallend*.

5.1.1 Gerade Funktionen

Eine Funktion $x \mapsto f(x)$ heisst eine *gerade Funktion*, wenn für alle x gilt:[3]

$$f(-x) = f(x)$$

d.h. wenn ihr Graph *axialsymmetrisch* zur y–Achse ist.

Die Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ mit *geraden* Exponenten n sind *gerade* Funktionen

5.1.2 Ungerade Funktionen

Eine Funktion $x \mapsto f(x)$ heisst eine *ungerade Funktion*, wenn für alle x gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

d.h. wenn ihr Graph *punktsymmetrisch* zum Ursprung ist.[4]

Die Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ mit *ungeraden* Exponenten n sind *ungerade* Funktionen.

5.2 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

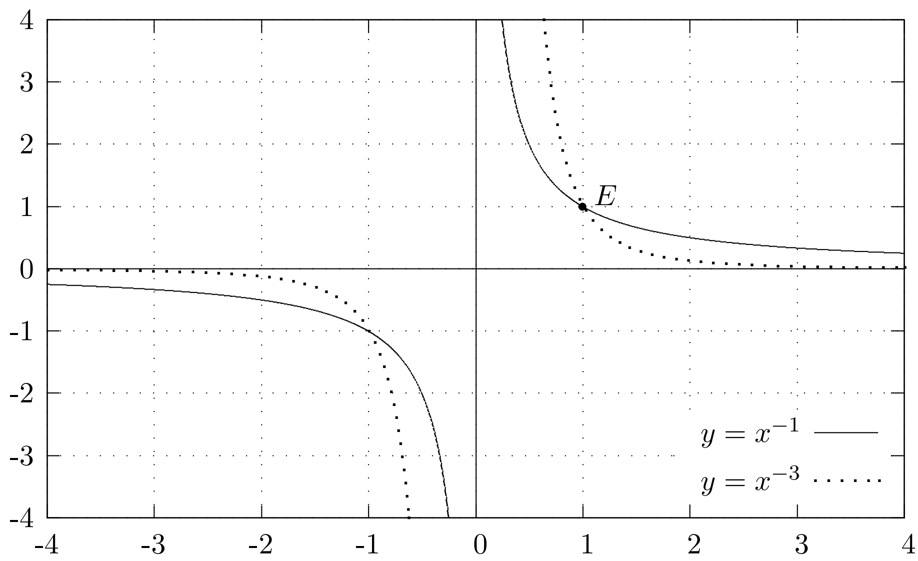

Abbildung 5: Potenzen mit ungeraden, negativen Exponenten

Die Graphen 5 und 6 auf Seite 18 besitzen folgende Eigenschaften:

[3]Bei dieser Definition wird vorausgesetz, dass der Definitionsbereich D der Funktion symmetrisch ist bezüglich 0, d.h. dass stets x und $-x$ zugleich in D liegen.

[4]Siehe Fussnote 3.

- Alle Kurven gehen durch den Punkt $E(1/1)$.
- An der Stelle $x = 0$ sind alle diese Funktionen nicht definiert.[5] Zudem haben sie dort eine sog. *Unendlichkeitsstelle*, weil die Beträge ihrer Funktionswerte beliebig gross werden, wenn sich x dem Wert 0 nähert.
- Für *gerade* Exponenten n sind die Funktionen

  $$f(x) = x^{-n}$$

  gerade Funktionen, weil gilt:

  $$f(-x) = (-x)^{-n} = \frac{1}{(-x)^n} = \frac{1}{x^n} = x^{-n} = f(x)$$

  Ihre Graphen sind daher *axialsymmetrisch* zur y–Achse. Zudem verlaufen sie im 1. und 2. Quadranten, weil alle Funktionswerte positiv sind.
- Für *ungerades* n sind die Funktionen

  $$f(x) = x^{-n}$$

  ungerade Funktionen, weil gilt:

  $$f(-x) = (-x)^{-n} = \frac{1}{(-x)^n} = \frac{1}{-x^n} = -\frac{1}{x^n} = -x^{-n} = -f(x)$$

  Ihre Graphen sind daher *punktsymmetrisch* zum Ursprung 0. Sie verlaufen im 1. und 3. Quadranten.
- Je grösser n, desto flacher verläuft der Graph von $x \mapsto x^{-n}$ nach rechts und links gegen die x–Achse hin.
- Je grösser n desto steiler nähert sich der Graph, wenn x gegen 0 geht, der y–Achse.
- Die x–Achse und die y–Achse sind *Asymptoten* der Kurven.[6]
- Für *gerades* n sind die Funktionen $x \mapsto x^{-n}$ für $x < 0$ monoton wachsend und für $x > 0$ monoton fallend.
- Für *ungerades* n sind die Funktionen $x \mapsto x^{-n}$ sowohl für $x < 0$ als auch für $x > 0$ monoton fallend.

[5] Man sagt, sie haben an der Stelle $x = 0$ eine *Definitionslücke*.

[6] Asymptoten sind Geraden, denen die Kurve beliebig nahe kommen, wenn man auf der Achse nach aussen geht.

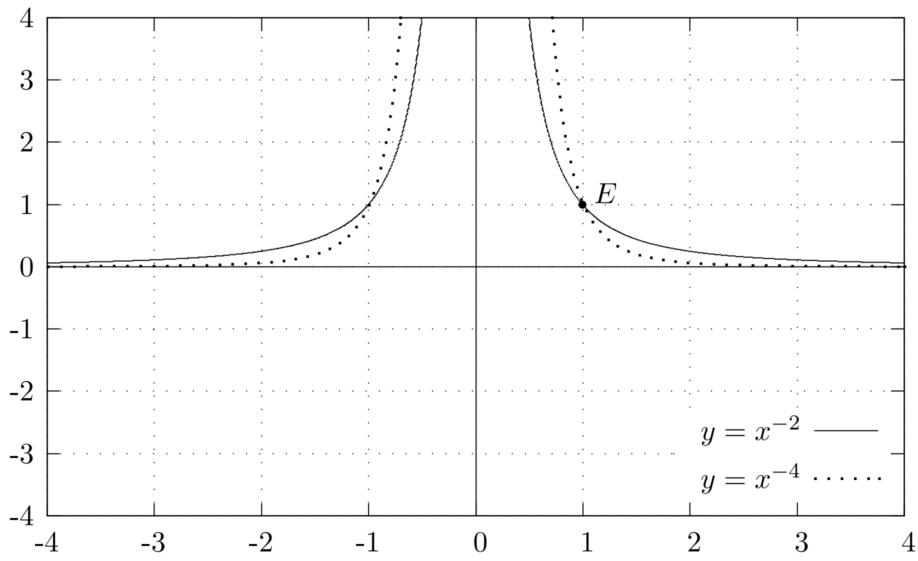

Abbildung 6: Potenzen mit geraden, negativen Exponenten

5.3 Potenzfunktionen mit beliebigen rationalen Exponenten

Eigenschaften der Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (siehe Abbildung 7 auf der nächsten Seite):

- Alle Kurven gehen durch den Punkt $E(1/1)$.
- Kurven mit positiven r gehen durch den Ursprung.
- Kurven mit negativen r haben die Koordinatenachsen als Asymptoten.
- Kurven mit $r > 1$ berühren die x–Achse.
- Kurven mit $0 < r < 1$ berühren die y–Achse im Ursprung.

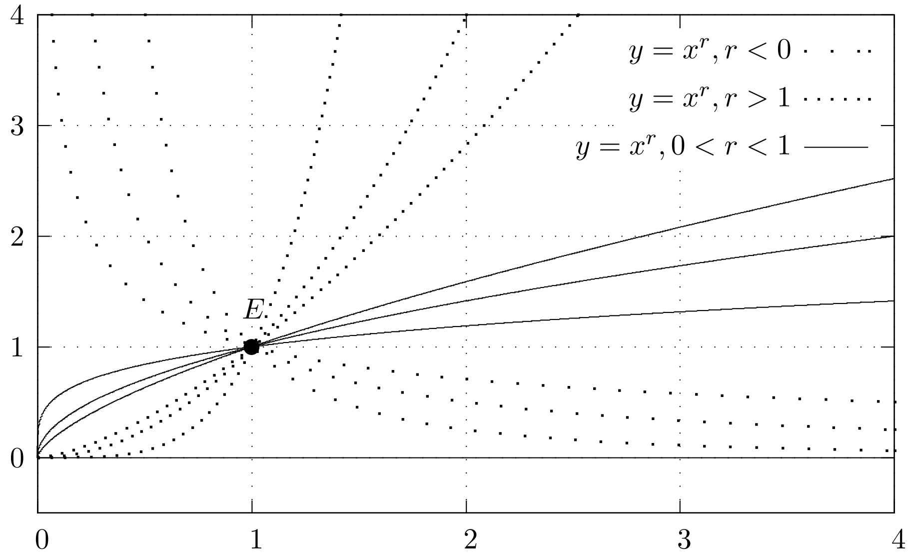

Abbildung 7: Potenzen mit rationalen Exponenten

6 Die Wurzelfunktionen

6.1 Die Quadratwurzelfunktion

Die *Quadratwurzelfunktion*

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

ordnet jeder Zahl x ihre Quadratwurzel $\sqrt{x}$ zu. Sie hat als *Definitionsbereich* D die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen, da $\sqrt{x}$ nur für $x \geq 0$ definiert ist:

$$D = \mathbb{R}_0^+$$

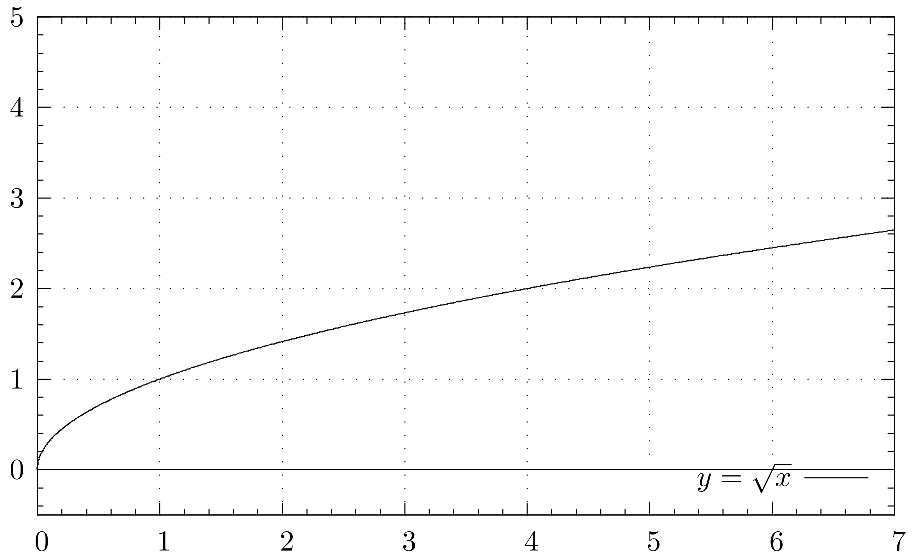

Abbildung 8: Graph der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$

Der Graph 8 zeigt folgendes:

- Die Funktion ist *monoton wachsend*, also gilt das das folgende Monotoniegesetz:
$$0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}. \tag{19}$$
- Die Funktion steigt gegen rechts immer langsamer.
- Die Kurve wird gegen den Ursprung hin “beliebig steil”, d.h. sie berührt die y–Achse im Ursprung.

6.1.1 Die Quadratwurzelfunktion als Umkehrung der Quadratfunktion

Die Quadratwurzelfunktion

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

ist die *Umkehrfunktion* der eingeschränkten Quadratfunktion

$$x \mapsto x^2 \quad (x \geq 0).$$

Man erhält den Graphen der Quadratwurzelfunktion

$$x \mapsto \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)$$

durch Spiegelung des Graphen der eingeschränkten Quadratfunktion

$$x \mapsto x^2 \qquad (x \geq 0)$$

an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten.

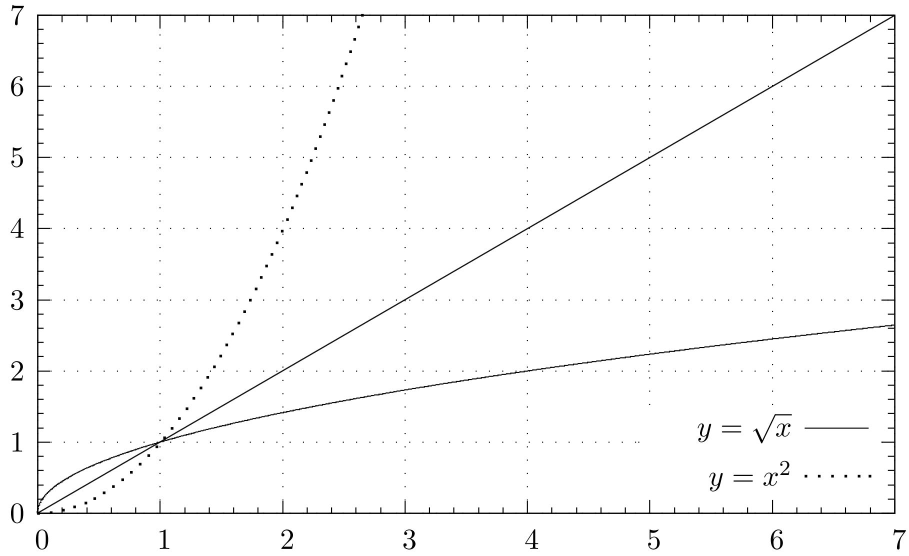

Abbildung 9: Quadratwurzelfunktion als Umkehrung der Quadratfunktion

Die Umkehrfunktion erhält man durch Vertauschen von x und y und anschliessendem Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= y^2 \qquad (x \text{ und } y \text{ vertauscht}) \\ y &= \sqrt{x} \qquad (\text{nach } x \text{ aufgelöst}) \end{aligned}$$

Um den Graphen der Quadratwurzelfunktion zu erhalten, zeichnet man zuerst den Graphen der *eingeschränkten* Potenzfunktion[7] $x \mapsto x^2$. Diesen Graphen spiegelt man an der Winkelhalbierenden[8] des I./III. Quadranten (siehe dazu Abbildung 9 auf der vorherigen Seite).

6.1.2 Die allgemeine Wurzelfunktion

Für jede natürliche Zahl n ist die allgemeine Wurzelfunktion

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} \qquad (x \geq 0)$$

die *Umkehrfunktion* der eingeschränkten Potenzfunktion

$$x \mapsto x^n \qquad (x \geq 0)$$

Der Graph der allgemeinen Wurzelfunktion

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} \qquad (x \geq 0)$$

ergibt sich durch Spiegelung des Graphen der eingeschränkten Potenzfunktion

$$x \mapsto x^n \qquad (x \geq 0)$$

an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten.

Die im vorherigen Abschnitt gemachten Feststellungen gelten für jede beliebige Wurzelfunktion (siehe Abbildung 10 auf der nächsten Seite)

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} \qquad (x \geq 0).$$

Die allgemeine Wurzelfunktion besitzt die selben Eigenschaften wie die Quadratwurzelfunktion:

- Die Graphen verlaufen im I. Quadranten, da $x \geq 0$.
- Die Graphen berühren die y–Achse im Ursprung.

[7] Die eingeschränkte Potenzfunktion beachtet nur Zahlen in $\mathbb{R}_0^+$, also alle positiven reellen Zahlen und die Zahl 0.

[8] Die Winkelhalbierende dieser Quadranten kann als Funktion von $y = x$ ausgedrückt werden.

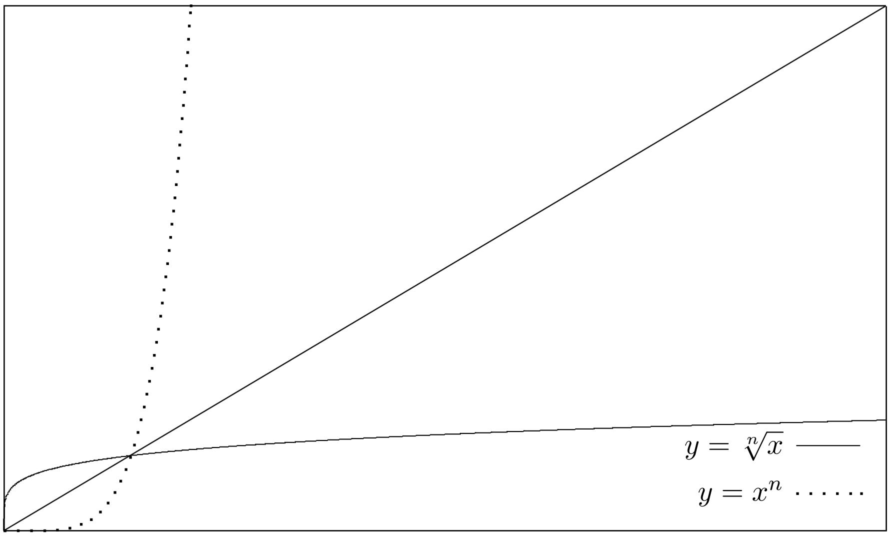

Abbildung 10: Wurzelfunktion als Umkehrung der Potenzfunktion

- Je grösser n ist, desto steiler laufen sie von rechts gegen den Ursprung und desto flacher laufen sie nach rechts in Unendliche.
- Die Wurzelfunktionen sind monoton wachsend:

$$0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

7 Exponentialfunktionen

7.1 Die Exponentialfunktion zur Basis 2

Als Exponentialfunktion zur Basis 2 bezeichnet man die Funktion

$$x \mapsto 2^x$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Sie ist monoton wachsend, und ihre Funktionswerte sind positiv. Ihr Graph schneidet die y–Achse bei $y = 1$, er geht nach rechts und oben ins Unendliche und schmiegt sich nach links der x–Achse an.

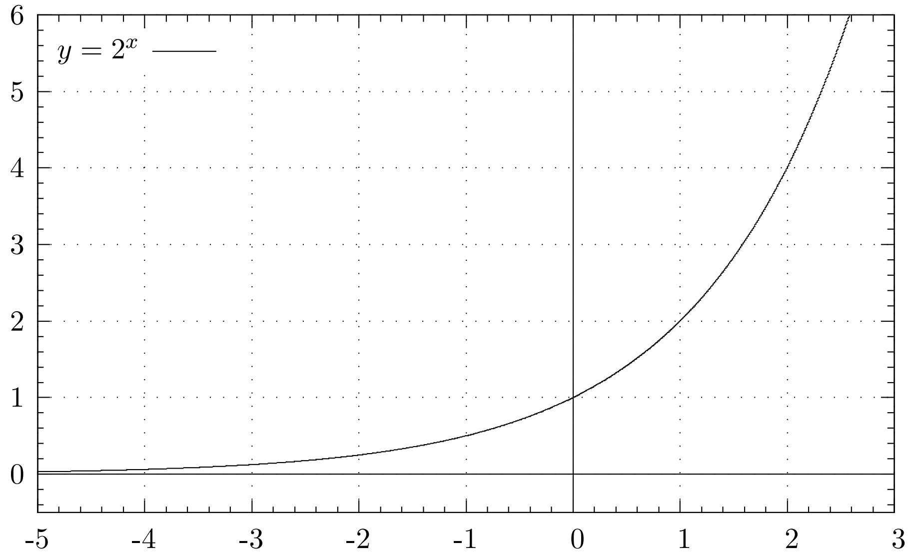

Abbildung 11: Graph der Exponentialfunktion $x \mapsto 2^x$

Die Eigenschaften der Exponentialfunktion zur Basis 2 (Siehe Abbildung 11)

- Die Funktion nimmt nur *positive* Werte an.
- Die Funktion ist monoton wachsend.
- Der Graph schneidet die y–Achse bei $y = 1$.
- Die x–Achse ist eine Asymptote der Kurve.
- Nach rechts und nach oben geht der Graph ins Unendliche.

7.2 Die allgemeine Exponentialfunktion

7.2.1 Exponentialfunktionen mit Basen grösser als 1

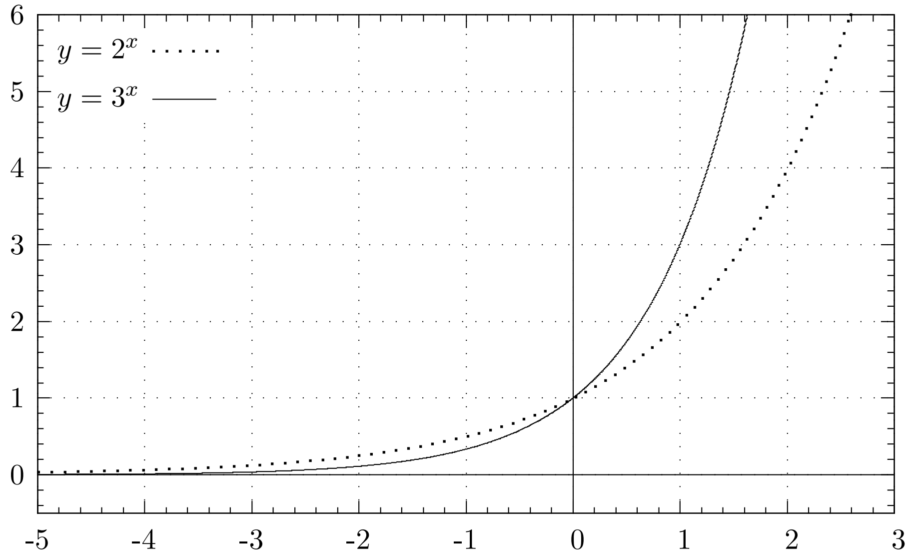

Abbildung 12: Exponentialfunktionen mit Basis grösser 1

Die Exponentialfunktion

$$x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R} \tag{20}$$

mit einer Basis $a > 1$ haben folgende Eigenschaften (Siehe dazu Abbildung 12):

- Die Funktionen nehmen nur positive Werte an.
- Sie sind monoton wachsend.
- Ihre Graphen schneiden die y–Achse bei $y = 1$.
- Die Graphen schmiegen sich nach links der x–Achse an und zwar um so stärker, je grösser die Basis a ist.
- Sie wachsen nach rechts oben ins Unendliche und zwar um so schneller, je grösser a ist.

7.2.2 Exponentialfunktionen mit Basen zwischen 0 und 1

Die Graphen der Exponentialfunktionen

$$x \mapsto a^x$$

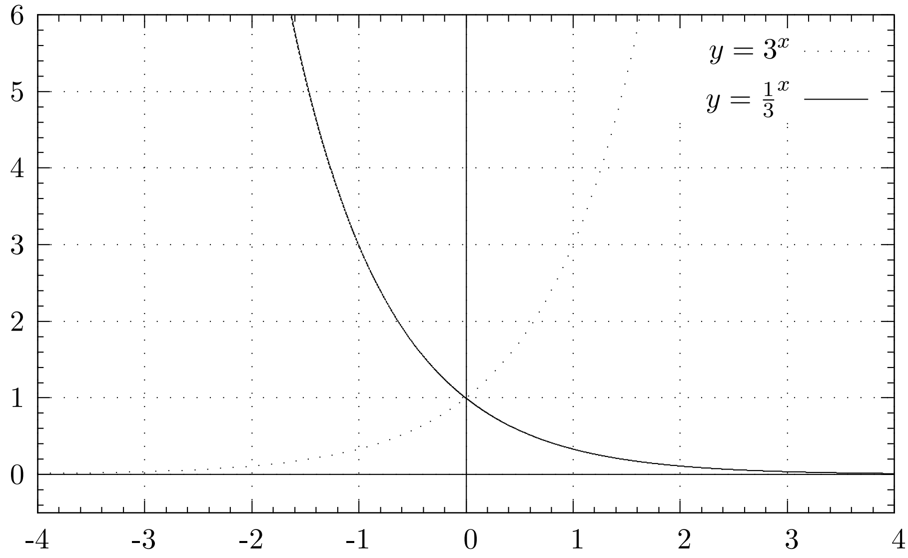

Abbildung 13: Exponentialfunktionen mit Basis zwischen 0 und 1

zu einer Basis a zwischen 0 und 1 ($0 < a < 1$) erhält man, indem man die Graphen von $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ an der y–Achse spiegelt. Die Funktionen $x \mapsto a^x$ haben somit folgende Eigenschaften (Abbildung 13):

- Sie nehmen nur positive Werte an.
- Sie sind monoton fallend.
- Ihre Graphen schneiden die y–Achse bei $y = 1$.
- Ihre Graphen schmiegen sich nach rechts der x–Achse an, während sie nach links immer schneller ins Unendliche gehen.

7.2.3 Zusammenfassung

Für $a > 0$ und $a \neq 1$ sind die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ entweder monoton steigend (im Fall $a > 1$) oder monoton fallend (im Fall $a < 1$). Die Funktionswerte sind stets positiv.

Zwei solche Funktionen mit zueinander reziproken Basen a haben bezüglich der y–Achse axialsymmetrische Graphen. Alle Graphen schneiden die y–Achse bei $y = 1$.

7.2.4 Die natürliche Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion, deren Graph im Punkt $F(0/1)$ die Tangente mit der Steigung 1 hat (siehe Abbildung 14 auf der nächsten Seite), heisst die na-

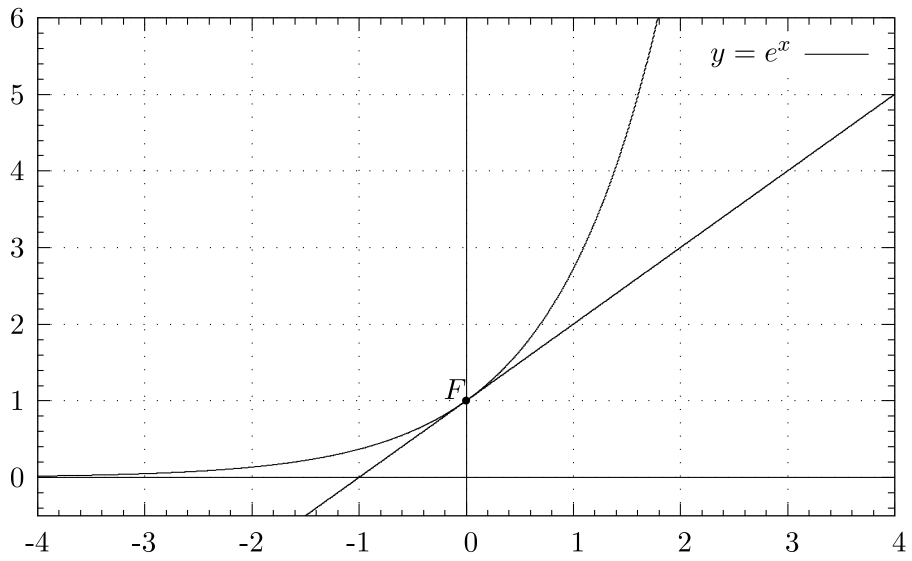

Abbildung 14: Die natürliche Exponentialfunktion

türliche Exponentialfunktion oder e–Funktion. Ihre Basis wird als *Eulersche Zahl* e bezeichnet.

Die Eulersche Zahl e hat den Wert

$$e = 2.7182818\ldots. \tag{21}$$

Man erhält Näherungswerte für e, indem man im Term

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{22}$$

grosse n–Werte einsetzt.

7.3 Die Exponentialfunktion $x \mapsto b \cdot a^x$

Ausgehend von der Exponentialfunktion

$$x \mapsto b \cdot a^x \tag{23}$$

spricht man von einer *Wachstumsfunktion* wenn $a > 1$ und von einer *Zerfallsfunktion* wenn $0 < a < 1$.

7.3.1 Der Graph von $x \mapsto b \cdot a^x$

Der Graph der Exponentialfunktion

$$x \mapsto b \cdot a^x$$

geht aus dem Graphen von $x \mapsto a^x$ hervor (siehe Abbildung 15)

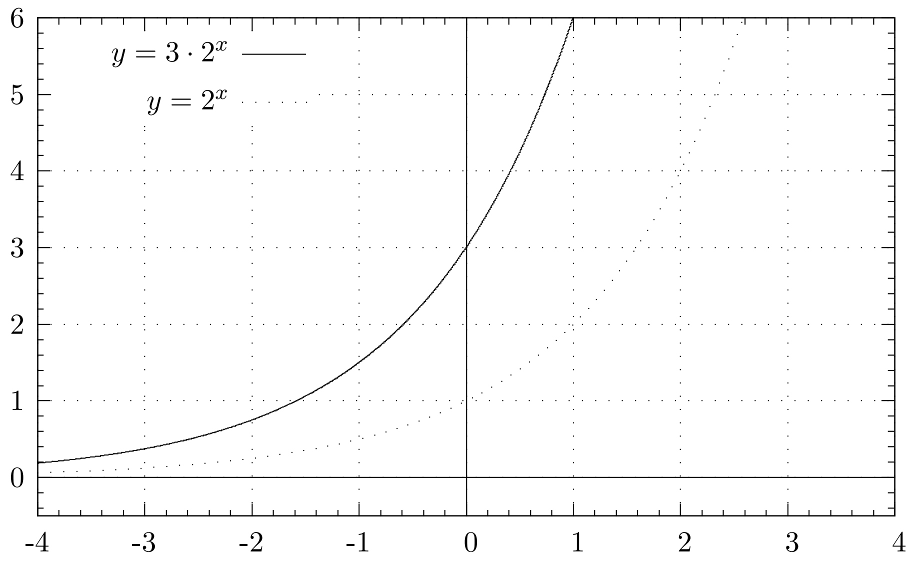

Abbildung 15: Graph der Exponentialfunktion $x \mapsto b \cdot a^x$

- durch Strecken (falls $|b| > 1$)
- durch Stauchen (falls $|b| < 1$) in Richtung der y–Achse mit dem Faktor $|b|$
- und evtl. durch anschliessendes Spiegeln an der x–Achse (falls $b < 0$).

7.3.2 Die Grundeigenschaft der Exponentialfunktion

> Wenn sich x jeweils um denselben Summanden h erhöht, multipliziert sich der Funktionswert von $x \mapsto ba^x$ jedesmal mit demselben positiven Faktor $q = a^h$. (Zu $h = 1$ gehört also $q = a = Basis$.)

Die Exponentialfunktion

$$x \mapsto b \cdot a^x$$

ver-a-facht ihren Funktionswert, wenn vom Wert an der Stelle $x = 0$ ausgegangen wird und x um 1 wächst. Das gilt auch, wenn von irgendeinem Wert x_1 ausgegangen wird:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1}$$

so gilt

$$\begin{aligned} y_2 = b \cdot a^{x_2} &= b \cdot a^{x_1+1} \\ &= b \cdot a^{x_1} \cdot a^1 \\ &= (b \cdot a^{x_1}) \cdot a \\ &= y_1 \cdot a \\ &= a \cdot y_1 \end{aligned}$$

Diese Feststellung behält ihre Richtigkeit auch, wenn anstelle von 1 von irgendeinem Wert h ausgegangen wird:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1}$$

so gilt

$$\begin{aligned} y_2 = b \cdot a^{x_2} &= b \cdot a^{x_1+h} \\ &= b \cdot a^{x_1} \cdot a^h \\ &= a^h \cdot (b \cdot a^{x_1}) \\ &= a^h \cdot y_1 \end{aligned}$$

Bemerkungen

- Man bezeichnet $q = a^h$ als den *Wachstumsfaktor zum Summanden* h. Ist z.B. $q = 1.24$, so kann man auch sagen, jede Erhöhung von x um h erzeuge eine *relative Zunahme* der Funktionswerte von 24%. Ist dagegen z.B. $q = 0.86$, so ergibt sich bei jeder Erhöhung von x um h eine *relative Abnahme* von 14%.

- Man kann beweisen, dass die Grundeigenschaft zusammen mit der Monotonie sogar charakteristisch für die Exponentialfunktion ist: *Jede Funktion, die für beliebige reelle Zahlen definiert ist, monoton ist und die Grundeigenschaft erfüllt, hat die Form* $x \mapsto b \cdot a^x$.

7.4 Anwendungen der Exponentialfunktionen

Die Bedingung "Wenn x sich um 1 erhöht, soll y immer um p% wachsen", bedeutet genau dasselbe wie eine exponentielles Wachstum nach dem Gesetz:

$$y = ba^x, \text{ wobei } a = 1 + \frac{p}{100}. \tag{24}$$

Die Bedingung "Wenn x sich um 1 erhöht, soll y immer um p% abnehmen" bedeutet genau dasselbe wie eine exponentielle Abnahme nach dem Gesetz

$$y = ba^x, \text{ wobei } a = 1 - \frac{p}{100}. \tag{25}$$

Teil III
Logarithmen und Exponentialgleichungen

8 Logarithmusfunktionen

8.1 Die Logarithmusfunktion zur Basis 2

8.1.1 Definition des Logarithmus zur Basis 2

Die Exponentialgleichung $2^x = b$ hat für jede positive Zahl b genau eine Lösung, die mit $\log_2 b$ bezeichnet wird (sprich: Logarithmus[9] von b zur Basis 2).

$\log_2 b$ ist also der Exponent x, mit dem man 2 potenzieren muss, um b zu erhalten:

$$x = \log_2 b \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = b \tag{26}$$

(Siehe Abbildung 16.)

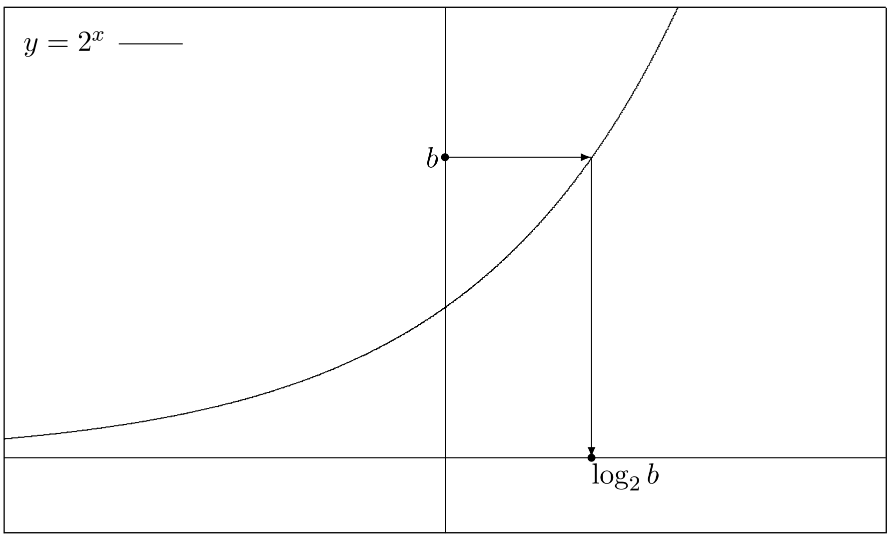

Abbildung 16: Graphische Lösung der Gleichung $2^x = b$

[9]Das Wort ‘Logarithmus’ hat keine kennzeichnende Bedeutung (griech. ‘logo’=Verhältnis, ‘arithmos’=Zahl); die Schreibweise ist analog zur Schreibweise $\sqrt[2]{b}$ für die positive Lösung der Gleichung $x^2 = b$ zu verstehen.

8.1.2 Die Logarithmusfunktion zur Basis 2

Unter der Logarithmusfunktion zur Basis 2 verstehen wir die Funktion:

$$x \mapsto \log_2 x \qquad (x \in \mathbb{R}^+). \tag{27}$$

Die Logarithmusfunktion zur Basis 2 ($x \mapsto \log_2 x, x \in \mathbb{R}^+$) ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis 2 ($x \mapsto 2^x, x \in \mathbb{R}$).

Man erhält den Graphen der Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_2 x$, indem man den Graphen der Exponentialfunktion $x \mapsto 2^x$ an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten spiegelt (Abbildung 17).

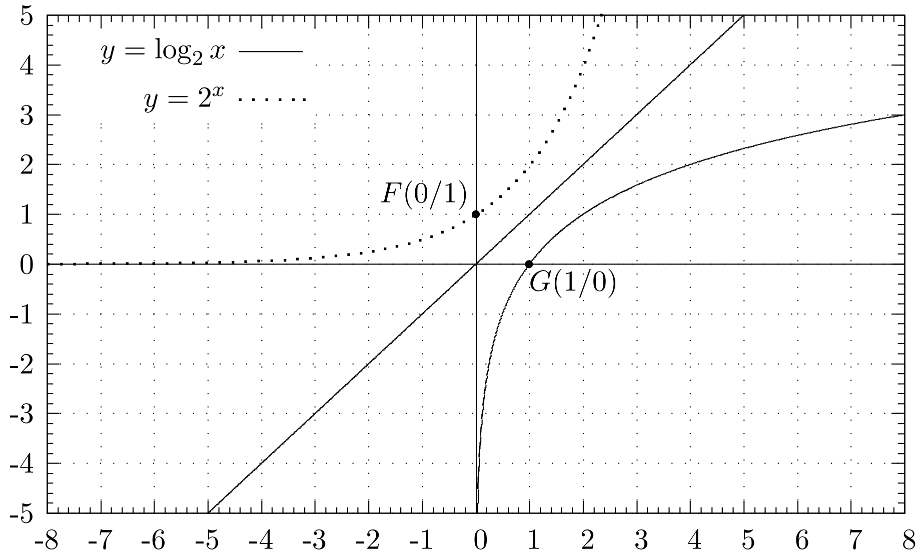

Abbildung 17: Zeichnen der Logarithmusfunktion zur Basis 2 durch Spiegeln der Exponentialfunktion

Gewisse Eigenschaften der Logarithmusfunktion und ihres Graphen ergeben sich nun aus denjenigen der Exponentialfunktion. Der Graph der Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_2 x$

- schmiegt sich nach unten der y–Achse von rechts an,
- schneidet die x–Achse im Punkt $G(1/0)$
- und steigt nach rechts immer langsamer (jedoch ins Unendliche) an.

Die Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_2 x$ ist also monoton wachsend und hat:

- negative Funktionswerte für $0 < x < 1$,
- positive Funktionswerte für $x > 1$,
- den Funktionswert 0 an der Stelle 1.

8.2 Die allgemeine Logarithmusfunktion

8.2.1 Die allgemeine Definition des Logarithmus

$\log_a b$ ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zur erhalten:

$$x = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b. \tag{28}$$

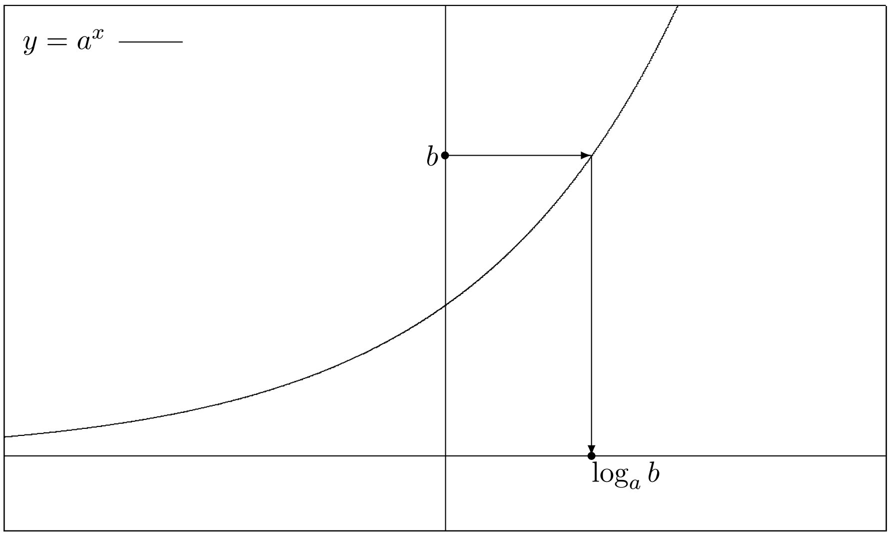

Abbildung 18: Graphische Lösung der Gleichung $2^x = b$

8.2.2 Der Graph der allgemeinen Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion zur Basis a ($x \mapsto \log_a x$) ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis a ($x \mapsto a^x$).

Die Beiden Graphen gehen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten auseinender hervor (siehe dazu Abbildung 19 auf der nächsten Seite).

Die Eigenschaften der Logarithmusfunktion

$$x \mapsto \log_a x \quad (x > 0, a > 1) \tag{29}$$

- Die Funktion ist monoton wachsend.
- Der Graph schneidet die x–Achse an der Stelle $x = 1$
- Die Funktionswerte sind negativ für $0 < x < 1$ und positiv für $x > 1$.

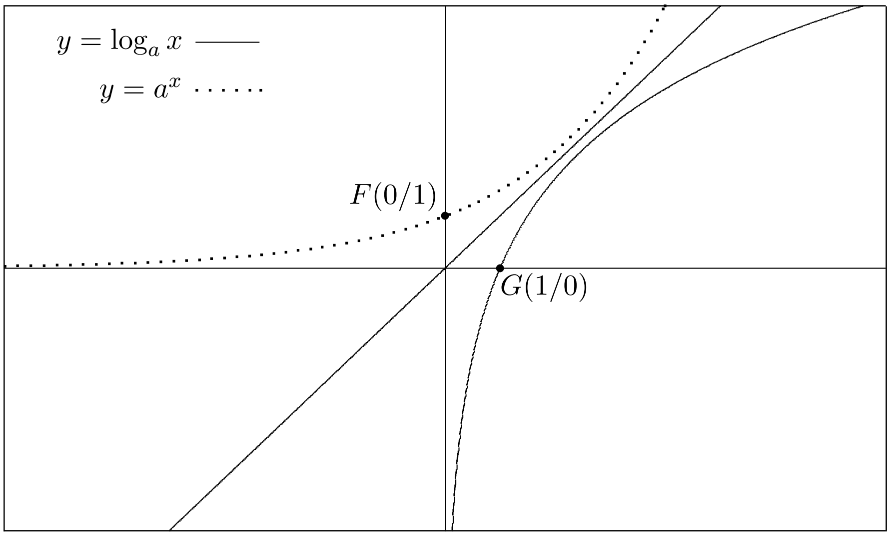

Abbildung 19: Zeichnen der Logarithmusfunktion durch Spiegeln der Exponentialfunktion

- Es ist stets $\log_a 1 = 0$.
- Die y–Achse ist eine Asymptote des Graphen.

8.2.3 Natürliche und dekadische Logarithmen

Der Logarithmus zur Basis e (Eulersche Zahl) heisst der *natürliche Logarithmus*. Statt $\log_e x$ schreibt man stets $\ln x$ (ln von lat. 'logarithmus naturalis'); es gilt also:

$$\ln x = \log_e x \quad \text{und} \quad x = \ln b \Leftrightarrow e^x = b. \tag{30}$$

Die Funktion

$$\ln : \quad x \mapsto \ln x \tag{31}$$

heisst die *natürliche Logarithmusfunktion*.

Die natürliche Logarithmusfunktion ist als Umkehrfunktion von $x \mapsto e^x$ dadurch von allen anderen Logarithmusfunktionen ausgezeichnet, dass die Tangente ihres Graphen im Punkt (1/0) die Steigung 1 hat (vergleiche dazu Abschnitt 7.2.4 auf Seite 26).

Der Logarithmus zur Basis 10 heisst der *dekadische Logarithmus*. Statt $\log_{10} x$ schreibt man stets $\lg x$; es gilt also:

$$\lg x = \log_{10} x \quad \text{und} \quad x = \lg b \Leftrightarrow 10^x = b. \tag{32}$$

8.3 Der Basiswechselsatz

Man erhält einen Logarithmus zur Basis b, indem man den entsprechenden Logarithmus zur Basis a mit der Konstanten $k = \frac{1}{\log_a b}$ multipliziert:

$$\log_b x = k \cdot \log_a x \qquad \left(k = \frac{1}{\log_a b}\right) \tag{33}$$

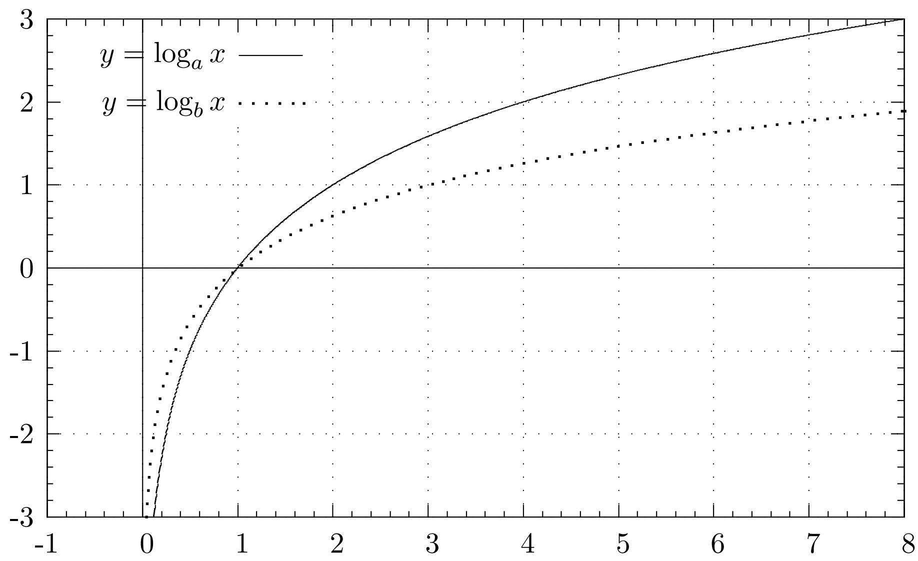

Abbildung 20: Basiswechselsatz

Beim Vergleich der Graphen zweier Logarithmusfunktionen zu verschiedenen Basen in Abbildung 20 kommt die Vermutung auf, dass wir den einen erhalten, indem wir den anderen in Richtung der y–Achse strecken, d.h. dass es einen konstanten Faktor c gibt, so dass für jedes $x > 0$ gilt:

$$\log_a x = c \cdot \log_b x \tag{34}$$

Für die Zahl $\log_a x$ gilt:

$$a^{\log_a x} = x \tag{35}$$

Soll nun

$$\log_a x = c \cdot \log_b x \tag{36}$$

gelten, so muss c so bestimmt werden, dass gilt

$$a^{c\cdot\log_b x} = x \tag{37}$$

also:

$$(a^c)^{\log_b x} = x \tag{38}$$

Nun ist andererseits:

$$b^{\log_b x} = x \tag{39}$$

Der Vergleich der beiden linken Seiten ergibt, dass:

$$(a^c)^{\log_b x} = b^{\log_b x} \tag{40}$$
$$a^c = b \tag{41}$$

Gemäss der allgemeinen Definition des Logarithmus (siehe Abschnitt 8.2.2 auf Seite 32) ist diese Gleichung äquivalent zu:

$$c = \log_a b \tag{42}$$

Es gilt:

$$\log_a x = \log ab \cdot \log_b x \tag{43}$$

Dividieren wir jetzt durch $\log_a b$, so erhalten wir:

$$\log_a x \cdot \frac{1}{\log_a b} = \log_b x \tag{44}$$
$$\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x \tag{45}$$

Mit der Gleichung (44) haben wir den Basiswechselsatz erhalten und mit Gleichung (45) die wichtigste Anwendung.

Mit Hilfe der Gleichung (45) kann mit dem Taschenrechner der Logarithmus zu beliebigen Basen berechnet werden:

$$\log_b x = \frac{\lg x}{\lg b}. \tag{46}$$

8.4 Die Logarithmusgesetze

8.4.1 Der Logarithmus eines Produktes

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren:

$$\log_a(pq) = \log_a p + \log_a q \quad (p, q > 0) \tag{47}$$

Beweis Da gemäss Definition $\log_a(pq)$ die Zahl ist, mit der man a potenzieren muss, um pq zu erhalten, müssen wir nur zeigen, dass dasselbe auch für $\log_a p + \log_a q$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{\log_a p + \log_a q} &= a^{\log_a p} \cdot a^{\log_a p} \\ &= p \cdot q \end{aligned}$$

8.4.2 Der Logarithmus eines Quotienten

Der Logarithmus eines Bruches ist die Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner:

$$\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q \quad (p, q > 0). \tag{48}$$

Beweis $\log_a p - \log_a q$ ist die Zahl, mit der man a potenzieren muss, um $\frac{p}{q}$ zu erhalten:

$$\begin{aligned} a^{\log_a p - \log_a q} &= \frac{a^{\log_a p}}{a^{\log_a q}} \\ &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

Spezialfall Der Logarithmus des reziproken Wertes einer Zahl ist gleich dem entgegengesetzten Logarithmus dieser Zahl:

$$\log_a \frac{1}{q} = -\log_a q \quad (q > 0) \tag{49}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \log_a \frac{1}{q} &= \log_a 1 - \log_a q \\ &= 0 - \log_a q \\ &= -\log_a q \end{aligned}$$

8.4.3 Der Logarithmus einer Potenz (Wurzel)

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt ‘Exponent mal Logarithmus der Basis’:

$$\log_a p^q = q \cdot \log_a p \quad (p > 0) \tag{50}$$

Spezialfall Wenn wir die n–te Wurzel als Potenz schreiben, erhalten wir das Gesetz über den Logarithmus einer Wurzel:

$$\log_a \sqrt[n]{p} = \log_a \left(p^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \log_a p$$

Somit ist

$$\log_a \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \log_a p \quad (p > 0)$$

8.5 Anwendung der Logarithmusgesetze

8.5.1 Anwendung der Logarithmusgesetze auf Logarithmusgleichungen

Wir versuchen, die gegebene Logarithmusgleichung in eine Gleichung ohne Logarithmen umzuformen:

- Entweder, indem wir die Gleichung auf die Form

  $$\log_a T_1(x) = \log_a T_2(x) \tag{51}$$

  bringen, woraus dann folgt:

  $$T_1(x) = T_2(x);$$

- oder, indem wir die Gleichung auf die Form

  $$\log_a T(x) = b \tag{52}$$

  bringen, waraus dann folgt:

  $$T(x) = a^b.$$

Dabei haben wir mit $T(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ Terme in x bezeichnet und mit b eine beliebige reelle Zahl.

9 Exponentialgleichungen

9.1 Auflösen einfacher Exponentialgleichungen ohne Logarithmieren

Eine Exponentialgleichung kann bisweilen gelöst werden, indem sie auf die Form

$$a^{T_1(x)} = a^{T_2(x)}$$

gebracht wird, woraus dann folgt:

$$T_1(x) = T_2(x);$$

dabei stehen $T_1(x)$ und $T_2(x)$ für Terme in x.

Beispiel: Gesucht sind alle Lösungen der Exponentialgleichung

$$4^{x+1} \cdot 8^{3-x} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}}{\left(\sqrt{32}\right)^{x-1}}$$

Lösungsidee: Alle vorkommenden Basen sind Potenzen von 2.
Es besteht daher die Hoffnung, dass die Terme links und rechts des Gleichheitszeichens mit Hilfe der Potenzgesetze alle als Zweierpotenzen geschrieben werden können.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\left(2^2\right)^{x+1} \cdot \left(2^3\right)^{3-x} &= \frac{\left(2^{-1}\right)^{4x}}{\left(\sqrt{2^5}\right)^{x-1}} \\
2^{2x+2} \cdot 2^{9-3x} &= \frac{2^{-4x}}{2^{\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}}} \\
2^{2x+2+(9-3x)} &= 2^{-4x-\left(\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}\right)} \\
2^{-x+11} &= 2^{-\frac{13}{2}x+\frac{5}{2}} \\
-x+11 &= -\frac{13}{2}x+\frac{5}{2} \\
\frac{11}{2}x &= -\frac{17}{2} \\
x &= -\frac{17}{11}
\end{aligned}$$

Wenn diese Umformung nicht möglich ist, müssen wir die Logarithmen zu Hilfe nehmen (siehe Abschnitt 9.2 auf der nächsten Seite).

9.2 Auflösung von Exponentialgleichungen mit Logarithmieren

Eine Exponentialgleichung kann bisweilen auf eine einfachere Gleichung zurückgeführt werden, indem die Gleichung *logarithmiert* wird. Dazu benutzen wir den *Zehnerlogarithmus*.

Beispiel:

$$2 \cdot 3^x = 5 \cdot 7^{2-x}$$

Durch Logarithmieren erhalten wir:

$$\lg(2 \cdot 3^x) = \lg(5 \cdot 7^{2-x})$$

daraus durch Umformung mittels der Logarithmusgesetze:

$$\begin{aligned}
\lg 2 + \lg 3^x &= \lg 5 + \lg 7^{2-x} \\
\lg 2 + x \lg 3 &= \lg 5 + (2-x) \lg 7 \\
\lg 2 + x \lg 3 &= \lg 5 + 2 \lg 7 - x \lg 7 \\
x(\lg 3 + \lg 7) &= \lg 5 + 2 \lg 7 - \lg 2 \\
x &= \frac{\lg 5 + 2 \lg 7 - \lg 2}{\lg 3 + \lg 7}
\end{aligned}$$

Dieses Resultat kann noch vereinfacht werden, indem wir auf Nenner und Zähler die Logarithmusgesetze anwenden:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\lg \frac{5 \cdot 7^2}{2}}{\lg(3 \cdot 7)} \\
&= \frac{\lg 122.5}{\lg 21}.
\end{aligned}$$

Teil IV
Anhang

A Kurven im Überblick

A.1 Potenzfunktionen

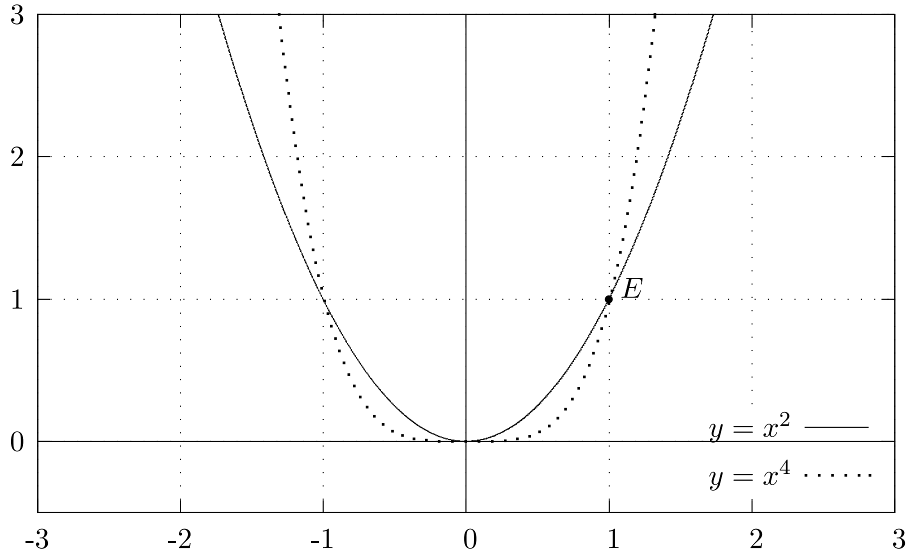

Abbildung 21: Gerade Potenzfunktionen $y = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

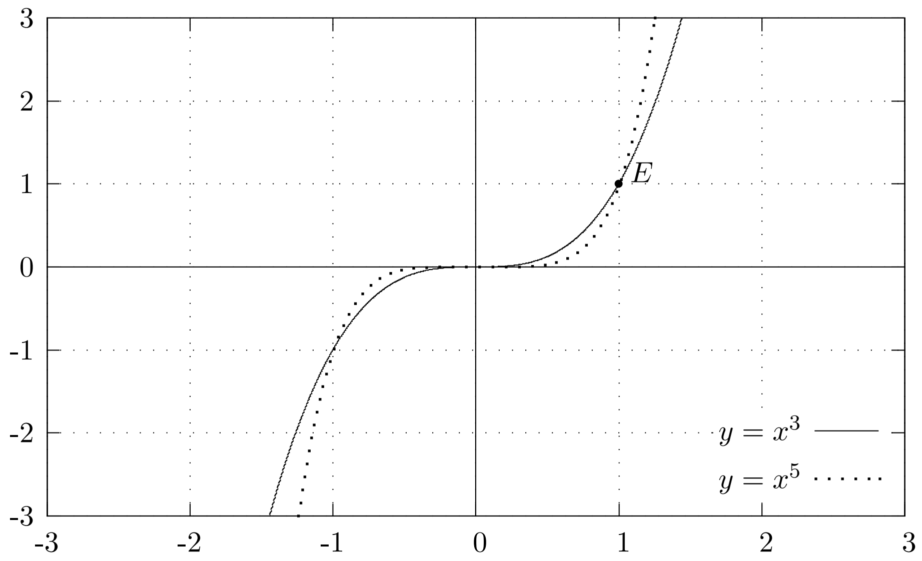

Abbildung 22: Ungerade Potenzfunktionen $y = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

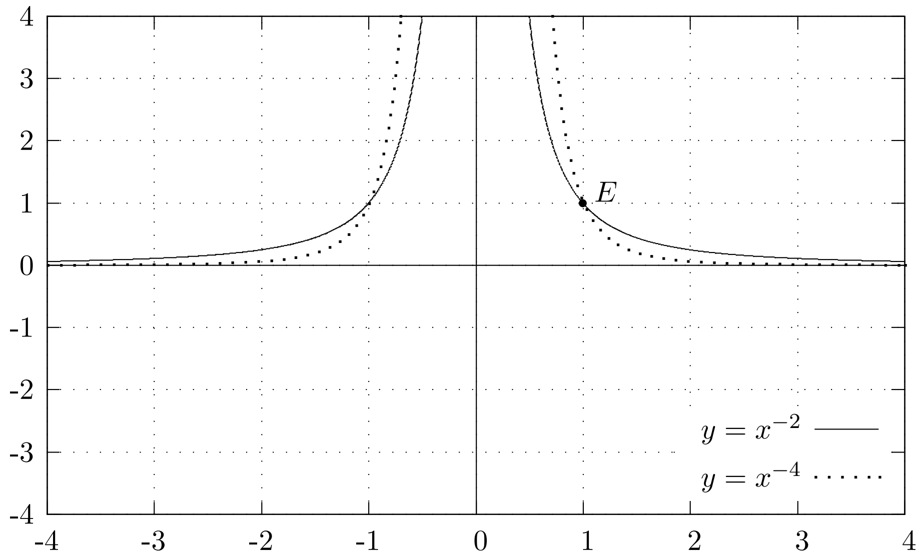

Abbildung 23: Gerade Potenzfunktionen $y = x^{-z} = \frac{1}{n} \quad (z \in \mathbb{Z})$

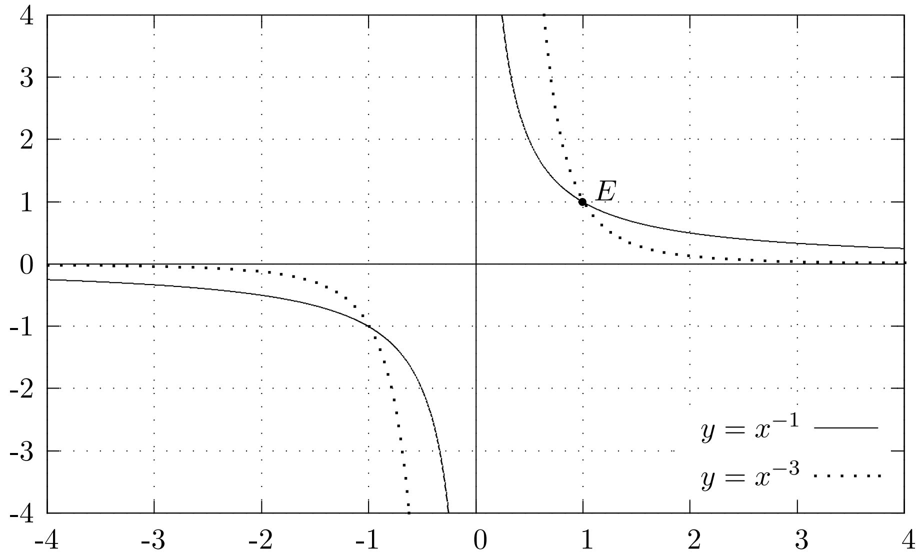

Abbildung 24: Ungerade Potenzfunktionen $y = x^{-z} = \frac{1}{n} \quad (z \in \mathbb{Z})$

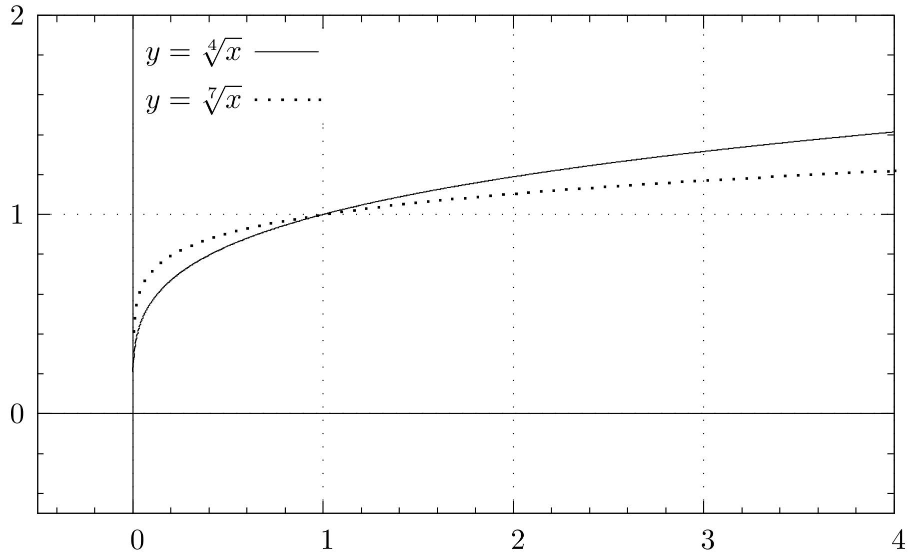

Abbildung 25: Wurzelfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

A.2 Exponentialfunktionen

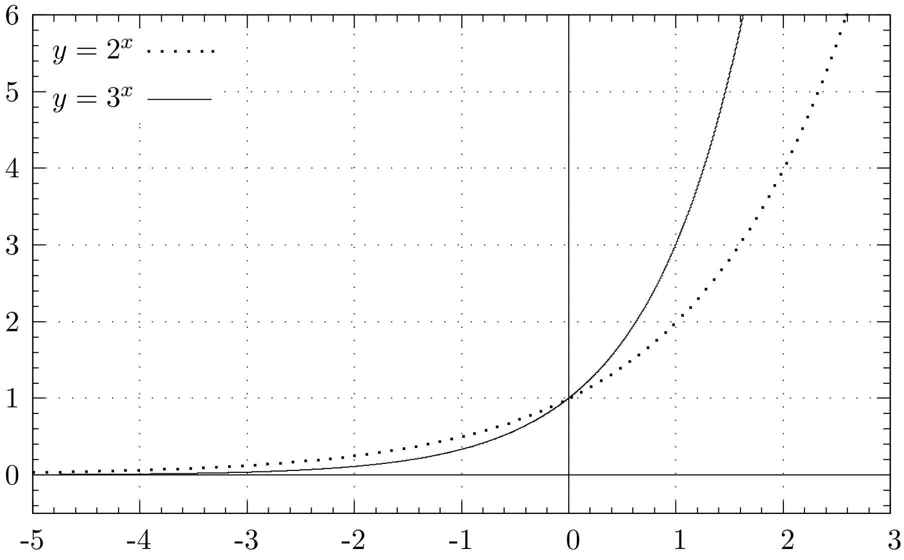

Abbildung 26: Exponentialfunktionen $y = a^x \quad (a > 1)$

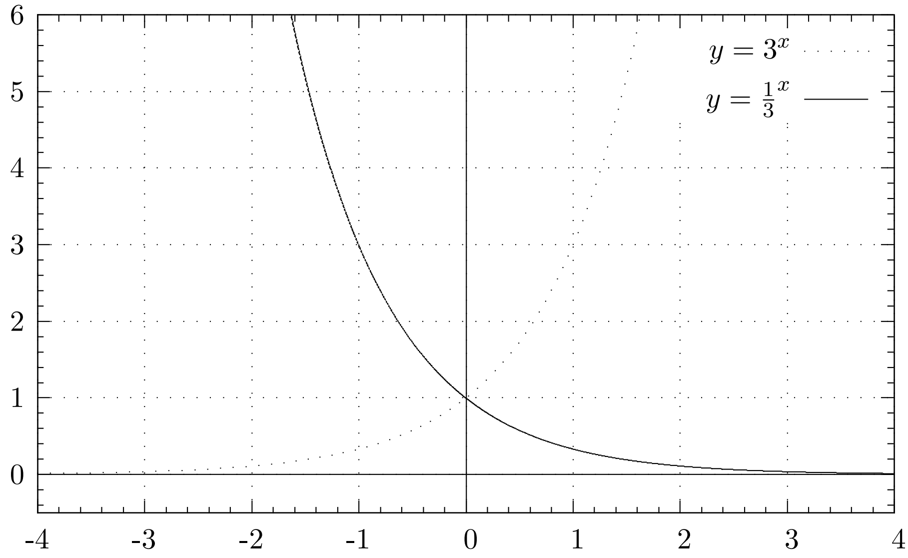

Abbildung 27: Exponentialfunktionen $y = a^x \quad (0 < a < 1)$

A.3 Logarithmusfunktionen

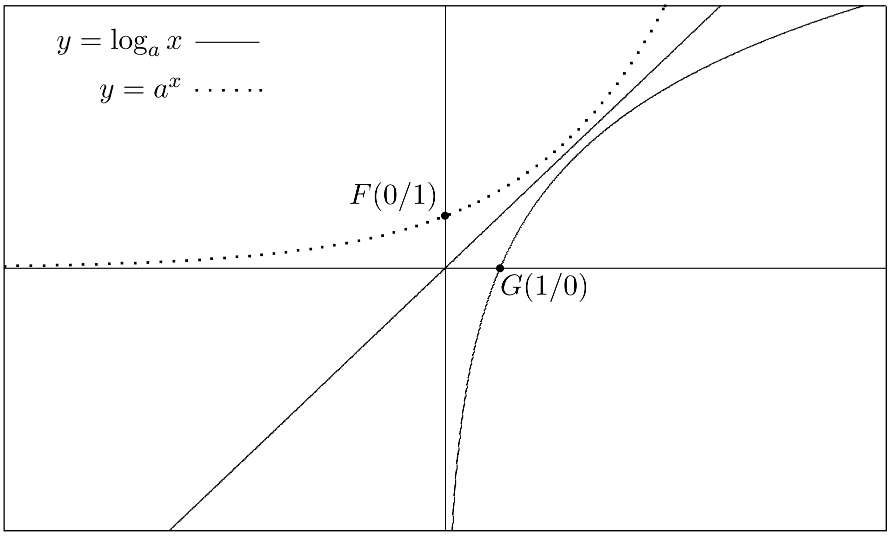

Abbildung 28: Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$

Literatur

[AA203] Dr. Heinz Bachmann und Otto M. Keiser, *Potenzen und Wurzeln*, Algebra und Analysis, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, ISBN 3-7155-0657-1

[AA204] Dr. Heinz Bachmann und Otto M. Keiser, *Exponential- und Logarithmusfunktionen*, Algebra und Analysis, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, ISBN 3-7155-0697-0

[MathematikI] Schülerduden, *Die Mathematik I*, 5., neu bearbeitete Auflage, 1990, Dudenverlag, Mannheim, ISBN 3-411-04205-2

Index

Asymptote
- allgemeine Logarithmusfunktion, 33
- Exponentialfunktion Basis 2, 24
- Logarithmusfunktion Basis 2, 31
- Potenzfunktion, negativer Exponent, 17
- Potenzfunktion, rationaler Exponent, 18

Axialsymmetrie
- Potenzfunktion, natürlicher Exponent, 16
- Potenzfunktion, negativer Exponenten, 17

Definitionslücke, 17
dekadischer Logarithmus, 33

e–Funktion, *siehe* natürliche Exponentialfunktion
Eulersche Zahl, 27
exponentielle Abnahme, 29
exponentielles Wachstum, 29

Funktion
- gerade, 16
- ungerade, 16

logarithmus naturalis, *siehe* natürlicher Logarithmus

Monotonie
- allgemeine Exponentialfunktion, 25
- allgemeine Wurzelfunktion, 23
- Exponentialfunktion Basis 2, 24
- Exponentialfunktionen, 26
- Logarithmusfunktion, 32
- Potenzfunktion, 14
- Potenzfunktion, negativer Exponent, 17
- Wurzelfunktion, 20

Monotoniegesetz
- Potenzfunktion, natürlicher Exponent, 15
- Wurzelfunktion, 20

natürliche
- Exponentialfunktion, 27
- Logarithmusfunktion, 33

natürlicher Logarithmus, 33

Potenzfunktion
- eingeschränkte, 22

Punktsymmetrie
- Potenzfunktion, natürlicher Exponent, 16
- Potenzfunktion, negativer Exponent, 17

relative
- Abnahme, 29
- Zunahme, 29

Umkehrfunktion, 21
Unendlichkeitsstelle, 17

Wachstumsfaktor
- zum Summanden, 29

Wachstumsfunktion, 27

Zerfallsfunktion, 27