Zusammenfassung
Folgen & Reihen

Rafael Ostertag

2005-07-26

Zusammenfassung

Das vorliegende Dokument ist eine Zusammenfassung des Akad Hefts “Folgen und Reihen” (siehe [AA205]). Jedoch wird die Vollständige Induktion in diesem Dokument nicht behandelt.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Teil I
Folgen & Reihen

1 Der Begriff der Folge und der Reihe

1.1 Der Begriff der Zahlenfolge

Ein Beispiel einer Zahlenfolge ist die *Fibonaccifolge*:

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \ldots$$

Bei einer solchen Zahlenfolge existiert ein erstes Glied a_1, ein zweites Glied a_2, usw. Allgemein lässt sich zu jeder natürlichen Zahl n ein n-tes Glied a_n zuordnen. So wird jeder natürlichen Zahl eine reelle Zahl zugeordnet:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto a_1 \\ 2 &\mapsto a_2 \\ 3 &\mapsto a_3 \end{aligned}$$

oder allgemein:

$$n \mapsto a_n$$

Definition 1 *Unter einer Zahlenfolge*[1] *versteht man eine Funktion*

$$n \mapsto a_n \tag{1}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$.

Da eine Folge nur jeder *natürlichen* Zahl einen Funktionswert zuordnet, besteht der Graph einer Folge aus lauter isolierten Punkten (siehe Abbildung 1 auf der nächsten Seite).

1.2 Explizite und rekursive Definition einer Folge

Explizite Definition: Man gibt die Funktionsgleichung an, d.h. eine Formel für das n-te Glied a_n. Beispiel:

$$a_n = \frac{n+1}{2}$$

[1] Statt “Zahlenfolge” sagen wir kurz auch “Folge”.

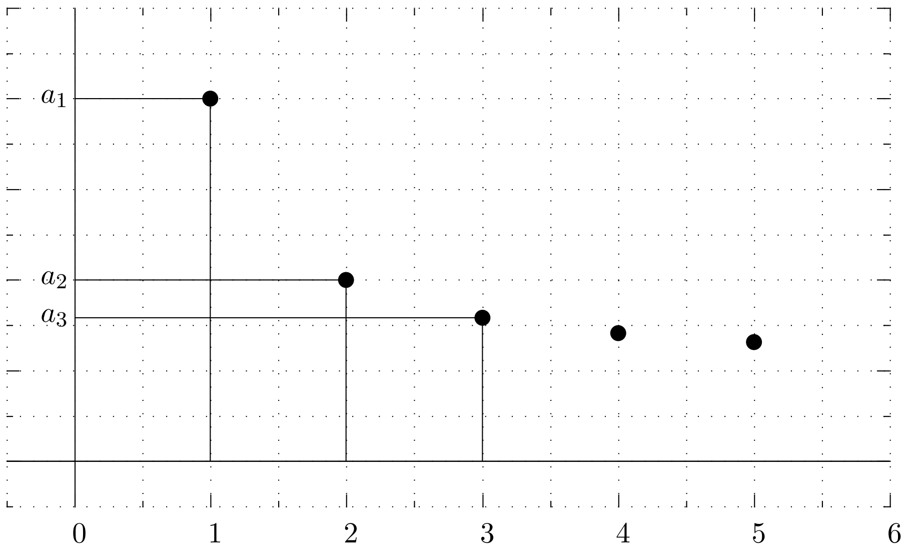

Abbildung 1: Der Graph einer Folge

Rekursive Definition: Man gibt das erste Glied a_1 an, dazu eine Formel, die angibt, wie man aus einem Glied a_n das nachfolgende Glied[2] erhält. Beispiel:

$$a_1 = 3,$$
$$a_{n+1} = 2a_n$$

1.3 Die Reihe einer Folge

Zu einer gegebenen Folge

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

lässt sich die Folge der Teilsummen bilden

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ \ldots \end{aligned}$$

Die n-te Teilsumme ist

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

[2]Das auf a_n folgende Glied hat den Index $(a+1)$, heisst also a_{n+1} (sprich “a n plus 1”).

Definition 2 *Unter der Reihe oder einer gegebenen Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ versteht man die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$, wobei*

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{2}$$

Für diese Folge schreibt man kurz auch

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

1.3.1 Summenzeichen

Statt

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

schreibt man auch

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(gelesen: s_n = Summe aller a_k von $k = 1$ bis n; das Zeichen Σ ist das griechische grosse Sigma). Wobei n eine sog. *freie Variable* ist, weil man für n irgendeine natürliche Zahl einsetzen darf. Dagegen läuft k von 1 bis n und darf im Ausdruck nicht durch eine feste Zahl ersetzt werden; k heisst eine *gebundene Variable*.[3]

Definition 3

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{3}$$

bedeutet: Man setze $k = 1$, dann $k = 2$, usw., bis $k = n$, und addiere die erhaltenen Zahlen.

[3] Statt k darf natürlich irgendeine andere Variable stehen.

2 Arithmetische Folgen und Reihen

Definition 4 *Unter einer arithmetischen Folge versteht man eine Folge, bei der zwei aufeinanderfolgende Glieder stets die gleiche Differenz d haben:*

$$a_{n+1} - a_n = d \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Eine arithmetische Folge ist also *rekursiv definiert* durch a_1 und die Gleichung

$$a_{n+1} = a_n + d \tag{5}$$

Es gibt somit *steigende* arithmetische Folgen, bei denen $d > 0$ und *fallende* arithmetische Folgen, bei denen $d < 0$ ist.

2.1 Graph

Zeichnen wir aufgrund der Rekursionsformel $a_{n+1} = a_n + d$ den Graphen einer arithmetischen Folge (Abbildung 2), dann wird sofort klar, dass die Punkte auf einer Geraden liegen.

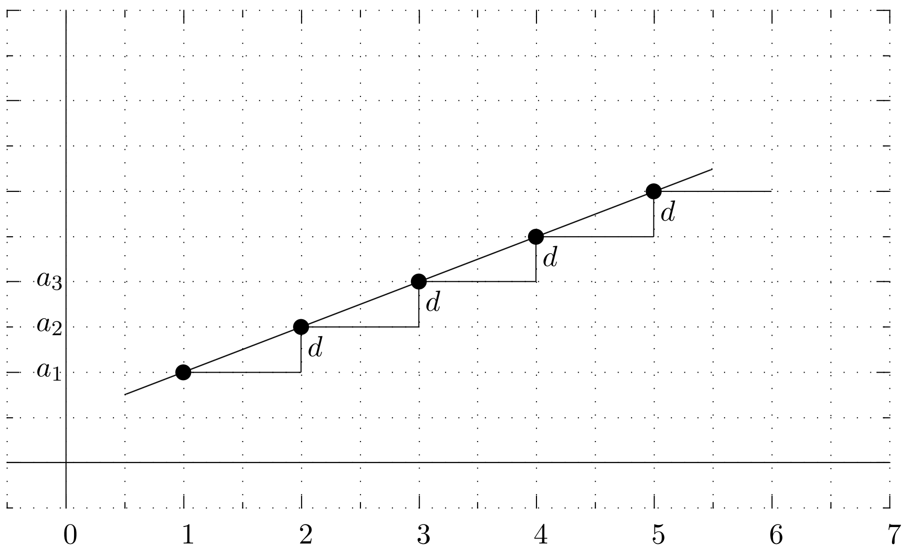

Abbildung 2: Der Graph einer arithmetischen Folge

2.2 Formel für das n-te Glied

Aus der Überlegung

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + d\\
&a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d\\
&a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d\\
&\ldots
\end{aligned}$$

erhält man durch Verallgemeinerung

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

für jede natürliche Zahl n.

Satz 1 *Eine arithmetische Folge mit dem 1. Glied a_1 und der konstanten Differenz d hat das n-te Glied*

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{6}$$

2.3 Formel für die n-te Teilsumme

Zu einer arithmetischen Folge

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

gehört die sog. *arithmetische Reihe*:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Darunter versteht man die Folge $n \mapsto s_n$ der Teilsummen (siehe auch Abschnitt 1.3 auf Seite 3):

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1\\
&s_2 = a_1 + a_2\\
&\ldots\\
&s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

Satz 2 *Die n-te Teilsumme*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

einer arithmetischen Folge lässt sich nach der Formel

$$s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) \tag{7}$$

berechnen.

Die Gleichung (7) ermöglicht, die n-te Teilsumme einer arithmetischen Folge aus Anfangs- und Endglied und der Gliedanzahl zu berechnen.

Beweis Die zu berechnenden Summen werden zweimal aufgeschrieben, einmal in der ursprünglichen und einmal in der umgekehrten Reihenfolge der Summanden:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \end{aligned}$$

Die Summe $a_1 + a_n$ der ersten zwei übereinanderstehenden Glieder ist gleich gross wie die Summe $(a_1 + d) + (a_n - d)$ der zweiten zwei, den $a_1 + d$ ist zwar um d grösser als a_1, aber $a_n - d$ ist um d kleiner als a_n. Analog kann überlegt werden, dass alle derartigen Summen, also $a_1 + a_n, (a_1 + d) + (a_n - d), (a_1 + 2d) + (a_n - 2d), \ldots, (a_n - 2d) + (a_1 + 2d), (a_n - d) + (a_1 + d), a_n + a_1$ den gleichen Wert $a_1 + a_n$ haben. Da es n solche Summen gibt, erhalten wir durch Addition der beiden obigen Gleichungen:

$$s_n + s_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + ((a_1 + d) + (a_n - d)) + \cdots + (a_n + a_1)}_{n\text{-mal}}$$

und damit

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

also

$$s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

3 Geometrische Folgen und Reihen

Bei der Folge

$$3; 6; 12; 24; ...$$

erhält man zu jedem Glied das nächste Glied durch Multiplikation mit 2, also mit einer konstanten Zahl. Die Folge wird so definiert:

Definition 5 *Unter einer geometrischen Folge versteht man eine Folge, bei der zwei aufeinanderfolgende Glieder stets den gleichen Quotienten q haben:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

Es kann zwischen einer *steigenden* Folge ($q > 1$), einer *fallenden* Folge ($0 < q < 1$) und einer *alternierenden* Folge[4] ($q < 0$) unterschieden werden.

3.1 Formel für das n-te Glied

Satz 3 *Für das n-te Gied a_n einer geometrischen Folge gilt die Formel*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{9}$$

Beweis Es gilt wegen $a_{n+1} = a_n \cdot q$:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q = (a_1 q)q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 q = (a_1 q^2)q = a_1 q^3 \\ \ldots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

3.2 Formel für die n-te Teilsumme

Es soll eine Formel für die n-te Teilsumme

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

einer geometrischen Folge $a_1, a_2, \ldots$ hergeleitet werden. Die neue Folge $s_1, s_2, \ldots$ dieser Teilsummen bezeichnet man als *geometrische Reihe*.

Satz 4 *Für die n-te Teilsumme*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

einer geometrischen Folge mit dem Quotienten q ($q \neq 1$) gilt die Formel

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{10}$$

[4]Eine Folge, deren Glieder abwechselnde Vorzeichen haben.

Beweis Für $n \geq 2$ erhält man

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ &= a_1 + q(a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-2}) \\ &= a_1 + q(s_n - a_1 q^{n-1}) \\ &= a_1 + q s_n - a_1 q^n \end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende Gleichung für s_n:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + q s_n - a_1 q^n \\ s_n - q s_n &= a_1 - a_1 q^n \\ s_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \\ s_n &= a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Für $n = 1$ gilt die Formel ebenfalls, denn es ergibt sich

$$s_1 = a_1 \frac{1-q^1}{1-q} = a_1$$

4 Grenzwerte von Folgen und Reihen

4.1 Grenzwerte geometrischer Folgen

Satz 5 *Das Verhalten einer geometrischen Folge $n \mapsto a_n$ für wachsendes n hängt vom Quotienten q ab:*

- *Falls $|q| < 1$, streben die Glieder a_n der Folge gegen 0. Die geometrische Folge hat den* Grenzwert 0, *oder anders ausgedrückt: sie* konvergiert *gegen 0:*

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ (lies: “Limes } a_n \text{ für } n \text{ gegen Unendlich gleich 0”)} \quad (11)$$

  Interpretation am Graphen: Zeichnet man einen beliebig schmalen, zur x-Achse symmetrischen Parallelstreifen, so liegen ab jeweils einem bestimmten Punkt alle Punkte des Graphen innerhalb des Streifens.

- *Falls $|q| > 1$, werden die $|a_n|$ beliebig gross, die Folge* divergiert.

4.2 Grenzwerte geometrischer Reihen

Satz 6 *Das Verhalten der Teilsummenfolge*

$$n \mapsto s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

für wachsende n hängt vom Wert des Quotienten q der geometrischen Folge ab und zwar gilt:

- *Für $|q| < 1$* konvergiert *die Teilsummenfolge gegen den Grenzwert*

  $$\frac{a_1}{1-q}$$

  man schreibt

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} \quad (12)$$

  Oder anders ausgedrückt: Für sehr grosse n nähert sich der Wert eines Gliedes beliebig nahe an den Grenzwert.

  Interpretation am Graphen: Ein beliebig schmaler Parallelstreifen, der symmetrisch zur Horizontalen mit der Gleichung

  $$y = \frac{a_1}{1-q}$$

  liegt, überdeckt in diesem Fall also ab jeweils einem gewissen Punkt alle Punkte des Graphen der Folge.

- *Für $|q| > 1$ werden die Beträge von s_n beliebig gross, die Teilsummenfolge* divergiert.

4.3 Grenzwerte beliebiger Zahlenfolgen

Definition 6 *Eine beliebige Zahlenfolge $n \mapsto a_n$ hat den Grenzwert a (konvergiert gegen a), wenn sich die Glieder a_n für hinreichend grosse n beliebig wenig von a unterscheiden, das heisst wenn zu jedem beliebig schmalen Parallelstreifen, der symmertrisch zur Horizontalen mit der Gleichung $y = a$ liegt, jeweils der Graph der Folge ab einem gewissen Punkt ganz innerhalb des Streifens verläuft.*

Eine Zahlenfolge, die keinen Grenzwert hat, heisst divergent.

Der Grenzwert kann durch die folgende Umformung gefunden werden. Als Beispiel dient die Folge $n \mapsto \frac{2n}{n+1}$:

In $a_n = \frac{2n}{n+1}$ wird der Bruch mit n gekürzt

$$a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$$

so dass n nur noch in der Form $\frac{1}{n}$ vorkommt. Dieser Term wird für sehr grosse n beliebig klein $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$, daher strebt

$$a_n = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$$

gegen

$$\frac{2}{1+0} = 2$$

also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

Mit Hilfe der obigen Umformung erkennt man gelegentlich auch leicht, dass eine Zahlenfolge divergiert.

Teil II
Anhang

A Beispiel für n-te Teilsumme von arithmetischen Folgen

Es soll anhand eines Beispiels[5] eine Formel für den Satz 2 auf Seite 6 hergeleitet werden. Um die Summe von

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + 100$$

zu bestimmen, kann folgende Überlegung gemacht werden: Die Summe der ersten und letzten Zahl ist gleich 101:

$$1 + 100 = 101$$

ebenso die Summe der zweiten und zweitletzten Zahl:

$$2 + 99 = 101$$

usw. bis

$$50 + 51 = 101$$

Da man 50 mal dieselbe Summe 101 erhält, ist die gesuchte Summe der Zahlen von 1 bis 100

$$50 \cdot 101 = 5050$$

Der Faktor 50 ist die halbe Anzahl der Summanden, der Faktor 101 ist die Summe aus dem ersten und letzten Summanden. Dieses Resultat gilt auch, wenn wir anstelle der einfachen arithmetischen Folge $1; 2; 3; \ldots$, eine beliebige arithmetische Folge nehmen und die n-te Teilsumme bilden.

[5] Nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

B Beispiel für n-te Teilsumme von geometrischen Folgen

Es soll die Aufgabe gelöst werden, die Summe der ersten 64 Glieder der geometrischen Folge

$$1; 2; 4; 8; \ldots$$

zu berechnen. Es kann dabei so vorgegangen werden: Die gesuchte Summe s ist

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} \\ &= 1 + (2 + 4 + \cdots + 2^{63}) \\ &= 1 + 2(1 + 2 + \cdots + 2^{62}) \end{aligned}$$

Die Klammer ist gerade die gesuchte Summe ohne das letzte Glied, also $s - 2^{63}$, somit gilt

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2(s - 2^{63}) \\ s &= 1 + 2s - 2^{64} \\ -s &= 1 - 2^{64} \\ s &= 2^{64} - 1 \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise wie oben berechnet man die n-te Teilsumme einer beliebigen geometrischen Folge.

C Graphen der geometrischen Folgen

Mit Hilfe der hergeleiteten Gleichung (9) auf Seite 8 ist es möglich, Aussagen über den Graphen einer geometrischen Folge zu machen. Dazu zwei Beispiele:

Bei der Folge $1; 2; 4; 8; \ldots$ gilt

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 1 \cdot \frac{2^n}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2^n$$

das heisst

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n$$

Die Punkte ihres Graphen in Abbildung 3 liegen also auf dem Graphen der Exponentialfunktion (siehe [EXP])

$$x \mapsto \frac{1}{2} \cdot 2^x$$

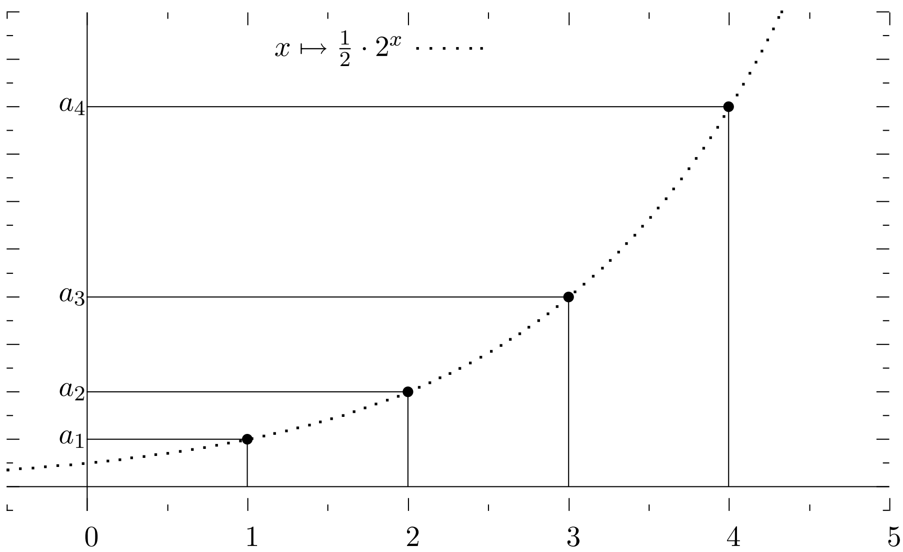

Abbildung 3: Beispiel 1 eines Graphen einer geometrischen Folge

Analog erhalten wir für die Folge

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

das heisst, die Punkte ihres Graphen in Abbildung 4 liegen auf dem Graphen der Exponentialfunktion

$$x \mapsto 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

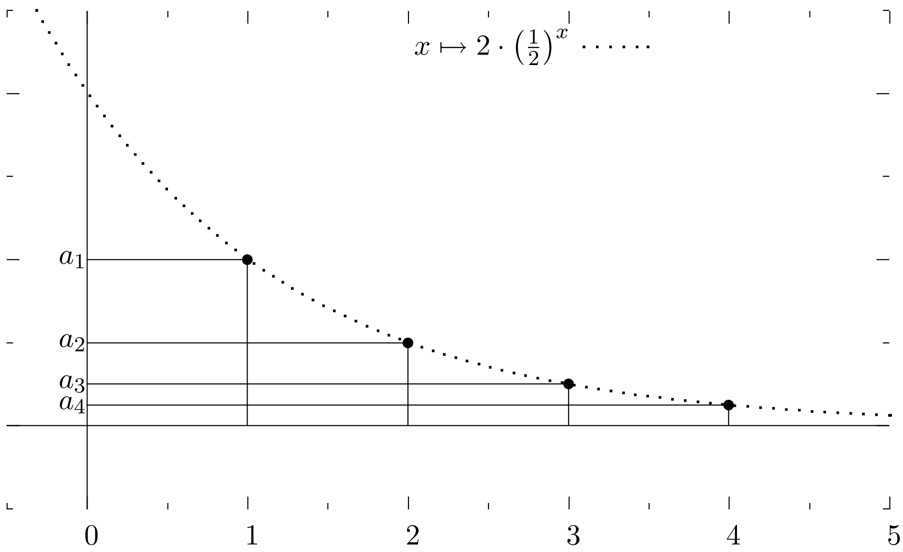

Abbildung 4: Beispiel 2 eines Graphen einer geometrischen Folge

Allgemein lässt sich erkennen, dass die Punkte des Graphen einer geometrischen Folge im Fall $q > 1$ auf einer *steigenden* und im Fall $0 < q < 1$ auf einer *fallenden* Exponentialkurve liegen.[6]

[6]Sofern $a_1 > 0$.

D Beispielberechnungen an einer geometrischen Figur

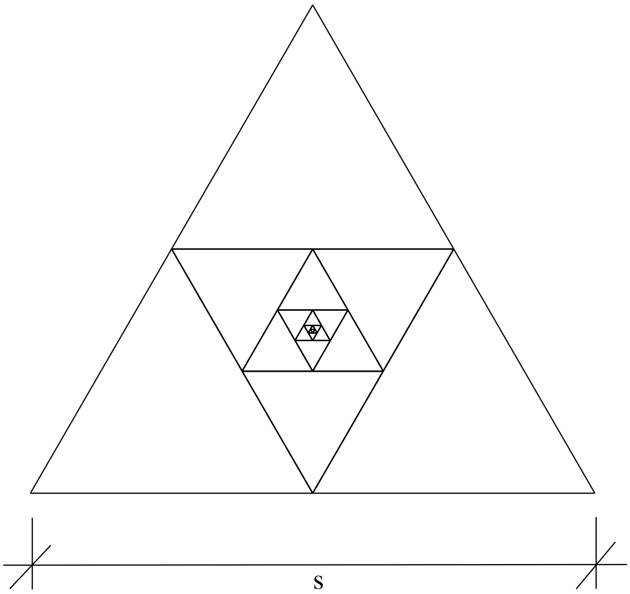

Abbildung 5: Gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge s

Wie Abbildung 5 zeigt, werden in ein gleichseitiges Dreieck, kleinere gleichseitige Dreiecke geschachtelt, welche jeweils um 180° zum Vorgänger gedreht sind. Ferner ist aus der Abbildung ersichtlich, dass die Eckpunkte der Dreiecke die Seiten der Vorgänger halbieren.

Das erste Dreieck hat eine Seitenlänge s, somit hat das zweite Dreieck die Seitenlänge $\frac{s}{2}$ usw. Wird angenommen, dass $s = 5cm$ ist, so kann man die Länge der Seite des 10. Dreiecks unter zuhilfenahme der Gleichung (9) auf Seite 8 berechnen:

$$\begin{aligned} a_1 &= s = 5cm \\ q &= \frac{1}{2} \\ n &= 10 \\ a_n &= 5cm \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(10-1)} \\ a_n &= 5cm \cdot 0.00195 \\ a_n &= 0.00977cm \end{aligned}$$

Die Seitenlänge des 10. Dreiecks beträgt somit $0.00977cm$.

Literatur

[AA205] Dr. Heinz Bachmann und Otto M. Keiser, *Folgen und Reihen*, Funktionen, Folgen und Reihen 3/4, Algebra und Analysis, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, ISBN 3-7155-0618-0

[EXP] Rafael Ostertag, *Zusammenfassung Potenzen und Wurzeln / Exponential- und Logarithmusfunktionen*, 2005, `http://www.guengel.ch/summaries/math/potenzenexponenten.pdf`

Index