Analysis II

Anic & Rafael Ostertag

2006-11-04

Zusammenfassung

Das vorliegende Dokument ist eine Zusammenfassung von [1] und [2]. In erster Linie soll es eine Art Formelsammlung sein, die aber auch die Herleitung aufführt. Überdies wurde auf eine sinnvolle Gruppierung der Themen geachtet.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Teil I
Vorwissen

1 Das Verketten von Funktionen

Unter der Verkettung zweier Funktionen u und v versteht man die Funktion

$$f(x) = v(u(x))$$

f wird mit

$$v \circ u$$

bezeichnet, somit

$$v \circ u : x \mapsto v(u(x))$$

Das Verketten von Funktionen ist nicht kommutativ:

$$v \circ u \neq u \circ v$$

1.1 Beispiel

Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$$

kann als Verkettung von zwei Funktionen ausgedrückt werden

$$a(z) = \sqrt{z} \qquad b(x) = x^2 - 3$$
$$f(x) = a \circ b = a(b(x)) = \sqrt{x^2 - 3}$$

2 Umkehrfunktion

2.1 Der Wertebereich einer Funktion

Der Wertebereich W_f einer Funktion f ist die Menge der Zahlen, die als Funktionswerte auftreten.

Der Wertebereich kann grafisch auf der y-Achse dargestellt werden.

2.1.1 Beispiel

Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = -x^2 + 6x - 3$$

und der Definitionsbereich sei das Intervall

$$D_f = [1; 4]$$

Der Wertebereich im Intervall D_f der Funktion f ist somit

$W_f = \{y | 2 \leq y \leq 6\} = [2; 6]$ (absolutes Minimum; absolutes Maximum)

2.2 Der Begriff der Umkehrfunktion

Ausgehend von der Zuordnung

$$f : x \mapsto y$$

ist die Zuordnung

$$y \mapsto x$$

die Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f, also

$$\bar{f} : y \mapsto x$$

Die Funktion $\bar{f}$ ist für alle $y \in W_f$ definiert, das heisst der Definitionsbereich von $\bar{f}$ ist der Wertebereich von f

$$D_{\bar{f}} = W_f$$

Nicht jede Funktion hat eine Umkehrfunktion. Als Beispiel soll die Funktion

$$f : x \mapsto x^2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

dienen. Für jedes $y \in f$ gibt es zwei x_0, nämlich x_0 und x_0'. Eine Funktion ist aber eine *eindeutige* Zuordnung. Eine Funktion hat genau dann eine Umkehrfunktion, wenn keine Parallele zur x-Achse den Graphen in mehr als einem Punkt schneidet. Dies ist dann der Fall, wenn verschiedene x-Werte auch verschiedene Funktionswerte haben. Wenn also

$$x_1 \neq x_2$$

ist, dann muss auch

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

sein. Funktionen mit dieser Eigenschaft heissen *eineindeutig.*

Graphisch geht die Funktion $\bar{f}$ aus der Funktion f hervor, indem man f an der Winkelhalbierenden des I./III. Quadranten spiegelt.

2.3 Die Berechnung der Umkehrfunktion

Die Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}$ ergibt sich, indem man die Funktionsgleichung

$$y = f(x)$$

nach x auflöst und y durch x ersetzt.

Vorgängig soll der Definitionsbereich von $\bar{f}$ ermittelt werden.

Teil II
Ableitungen

3 Übersicht

Reihenfolge der Regeln:

1. Potenzregel für $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ (siehe [3])
$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$
2. Produktregel und Quotientenregel für $f(x) = x^{-n}$ für $n \in \mathbb{Z}$
$$f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$$
3. Kettenregel für $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ für $n \in \mathbb{Q}$
$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$
4. Folgerung: Potenzregel für $f(x) = x^r$ für $r \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

4 Die Produktregel

Summen dürfen gliedweise abgeleitet werden

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \qquad && n \in \mathbb{N} \\ f'(x) &= f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x) \qquad && n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Produkte hingegen nicht

$$\begin{aligned} g(x) &= g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_n(x) \qquad && n \in \mathbb{N} \\ g'(x) &\neq g_1'(x) \cdot g_2'(x) \cdot \ldots \cdot g_n'(x) \qquad && n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Bei Produkten gilt die Produktregel, welche im Abschnitt A auf Seite 10 hergeleitet wird, und folgendermassen lautet:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

oder in Kurzform

$$(uv)' = u'v + uv'$$

5 Die Quotientenregel

Die Quotientenregel baut auf der Produktregel und der Reziprokregel auf. Die Herleitung ist in Abschnitt B auf Seite 12 erläutert.

Gegeben ist die Funktion f

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Die Ableitung $f'(x)$ kann folgendermassen berechnet werden

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

oder in Kurzform

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

6 Die Kettenregel

Gemäss der Herleitung der Kettenregel in Abschnitt C auf Seite 13 gilt:

$$f(x) = v(u(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$$

7 Die Ableitungsregel für Potenzen

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad n \in \mathbb{R}$$

8 Die Ableitungsregel der Wurzelfunktion

Die Ableitung der Wurzelfunktion (Herleitung siehe Abschnitt D auf Seite 14)

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

ist die Funktion

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Teil III
Integrationen

9 Integrale von Potenzfunktionen

Für jedes $n \in \mathbb{R}$ ausser für $n = -1$ gilt

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

10 Integrieren durch lineare Substitution

Ist die Funktoin f von der Form

$$f(x) = g(ax + b)$$

so ergibt sich eine Stammfunktion F, indem man

- $ax + b$ durch t ersetzt
- von der Funktion $t \mapsto g(t)$ eine Stammfunktion $t \mapsto G(t)$ ermittelt
- die Substitution rückgängig macht und durch den Faktor von x dividiert.

Dies ergibt

$$F(x) = \frac{1}{a} G(ax + b)$$

Teil IV
Kurvendiskussionen

11 Die Diskussion von gebrochen rationalen Funktionen

Im Allgemeinen kann das Schema aus [3] verwendet werden. Im Speziellen wird es um folgende Punkte erweitert:

- Definitionslücken bestimmen
- Art der Definitionslücken bestimmen
- Punkte mit horizontalen Tangenten bestimmen (Extrema)
- Verhalten im Unendlichen bestimmen

Das Vorgehen wird im Weiteren anhand der Funktion f besprochen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad \begin{array}{l} (\text{Grad von } g(x) = m) \\ (\text{Grad von } h(x) = n) \end{array} \tag{1}$$

11.1 Definitionslücke und Art der Definitionslücke

Eine Lücke befindet sich an der Stelle, an welcher für x_0 der Funktionswert von $h(x_0) = 0$ ist.

Es handelt sich um eine *behebare Lücke*, falls an der Stelle x_0 $g(x_0) = 0$. Es lässt sich dann $\frac{g(x)}{h(x)}$ kürzen, und die Lücke somit beheben.

Ist $g(x_0) \neq 0$, so handelt es sich einen *Pol* an der Stelle x_0, durch welche eine Parallele zur y-Achse geht.

11.2 Verhalten im Unendlichen

Durch das Bestimmen des Verhalten im Unendlichen kann eine Aussage über das Aussehen der Asymptote gemacht werden.

Dazu müssen drei verschiedene Fälle betrachtet werden:

$m < n$	$m = n$	$m > n$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_{as} = 0$	$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x) \div x^m}{h(x) \div x^n} = y_{as}$	Division von (1) mit Divisionsalgorithmus ausführen und dann den limes bestimmen.

Tabelle 1: Bestimmen des Verhalten im Unendlichen

12 Die Diskussion von Wurzelfunktionen

Die Diskussion von Wurzelfunktionen beinhaltet folgende Punkte

- Definitionsbereich bestimmen
- Nullstellen bestimmen ($f(x) = 0$)
- Punkte mit horizontalen Tangenten bestimmen ($f'(x) = 0$)
- Verhalten am Rande bestimmen (entspricht der Steigung am Rande)

Beispiel

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$$

Definitionsbereich

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &\geq 0 \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Graph zeichnen (siehe Abbildung 1 auf Seite 10). Daraus folgt

$$D = \{x | x \leq -\sqrt{3} \wedge x \geq \sqrt{3}\}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{3} \quad \text{(gleich Definitionsbereich)} \end{aligned}$$

Extrema bestimmen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} \\ f'(x) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Da aber 0 nicht im Definitionsbereich liegt, hat die Funktion kein Extremum.
Verhalten am Rande bestimmen

$$f'(\pm\sqrt{3}) = \infty \text{ (Division durch 0, daher unbestimmt)}$$

Die Funktion hat an den Punkten $x = \pm\sqrt{3}$ eine Tangente parallel zur y-Achse.

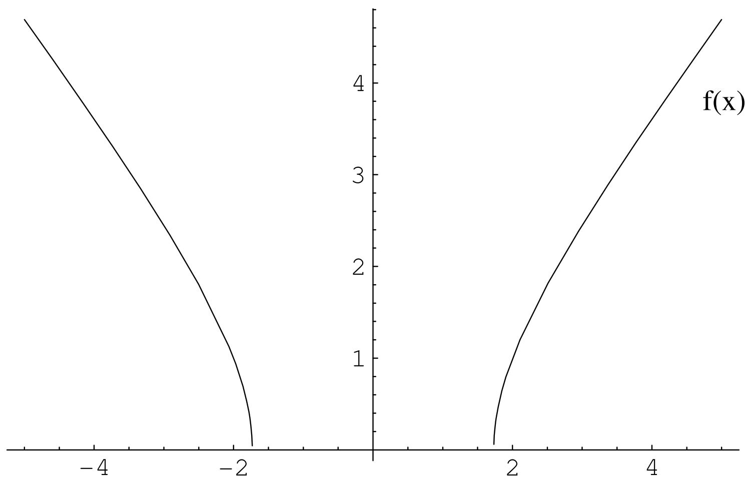

Abbildung 1: Graph der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

Teil V
Anhang

A Herleitung der Produktregel

Voraussetzungen Gegeben ist die Funktion f

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \tag{2}$$

wobei u und v differenzierbar sind (siehe [3])

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) \tag{3}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) \tag{4}$$

Bestimmung von f' Per definitionem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{5}$$

für den Differenzenquotienten von (2) gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} \tag{6}$$

Durch Anwendung eines Trick kann der rechte Term in (6) umgeformt werden. Der Trick besteht darin, den Term

$$u(x) \cdot v(x+h) \tag{7}$$

zu subtrahieren und gleichzeitig wieder zu addieren. Dies entspricht einer Addition von 0.

$$-u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h) = 0$$

Somit ergibt sich für (6)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - u(x) \cdot v(x)}{h} \tag{8}$$

Durch geeignete Umformung von (8) erhalten wir

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underbrace{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{h \to 0 \Rightarrow u'(x)} \cdot \underbrace{v(x+h)}_{h \to 0 \Rightarrow v(x)} + \underbrace{u(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{v(x+h) - v(x)}{h}}_{h \to 0 \Rightarrow v'(x)}$$

Das heisst

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \tag{9}$$

B Herleitung der Quotientenregel

Voraussetzung Gegeben ist die Funktion f

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \tag{10}$$

wobei u und v differenzierbar sind.

Bestimmung von f' Quotient als Produkt schreiben

$$f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} \tag{11}$$

Der Term $\frac{1}{v(x)}$ in (11) wird als Funktion definiert

$$g(x) = \frac{1}{v(x)} \tag{12}$$

Nach der Produktregel erhält man

$$f'(x) = u'(x) \cdot g(x) + u(x) \cdot g'(x) \tag{13}$$

Die Funktion g durch ihre Definition (12) ersetzen

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \left(-\frac{v'(x)}{(v(x))^2}\right) \tag{14}$$

Das heisst

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \tag{15}$$

C Herleitung der Kettenregel

Voraussetzungen Gegeben sei eine Funktion f, welche die Verkettung von zwei differenzierbaren Funktionen u und v ist

$$f(x) = v(u(x)) \tag{16}$$

Bestimmung von f' Ausgehend von (5) kann der Differenzenquotient von f mit u und v ausgedrückt werden

$$m(h) = \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{h} \tag{17}$$

Durch Erweitern mit

$$u(x+h) - u(x) \tag{18}$$

erhält man

$$m(h) = \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \tag{19}$$

Zur Vereinfachung werden folgende "Abkürzungen" eingeführt

$$u(x) = t \tag{20}$$

und

$$u(x+h) - u(x) = \bar{h} \tag{21}$$

daraus folgt

$$u(x+h) = u(x) + \bar{h} \tag{22}$$

also

$$u(x+h) = t + \bar{h} \tag{23}$$

Dies in (19) eingesetzt ergibt

$$m(h) = \frac{v(t+\bar{h}) - v(t)}{\bar{h}} \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \tag{24}$$

Daraus folgt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+\bar{h}) - v(t)}{\bar{h}} \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = v'(t) \cdot u'(x) \tag{25}$$

t wird nun durch (20) ersetzt

$$f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x) \tag{26}$$

D Die Herleitung der Ableitung der Wurzelfunktion

Die Funktion u ordnet x die n-te Wurzel von x zu. Die Funktion v ordnet x die n-te Potenz von x zu. Wenn die Funktionen verkettet werden

$$f = u \circ v \tag{27}$$

so gibt es am Ende wieder x. Die untenstehende Formel (28) beschreibt genau diesen Sachverhalt.

$$x \overset{u}{\mapsto} \sqrt[n]{x} = u \overset{v}{\mapsto} u^n = x \tag{28}$$

Gemäss Kettenregel können wir diese Funktion ableiten, wobei wir aber noch nicht wissen, wie u' genau aussieht.

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt[n]{x} \qquad & u'(x) &= \text{unbekannt} \\ v(u) &= u^n \qquad & v'(x) &= n\, u^{n-1} \end{aligned} \tag{29}$$

Überdies wissen wir, dass

$$f(x) = v(u(x)) = x \tag{30}$$

und

$$f'(x) = v' \cdot u' = 1 \quad \text{(die Ableitung von } x \text{ ist 1 (siehe (30))} \tag{31}$$

ist. Daraus folgt

$$\Rightarrow n \cdot u^{n-1} \cdot u' = 1 \tag{32}$$

Jetzt ist es möglich, nach u' aufzulösen

$$u' = \frac{1}{n\, u^{n-1}} \tag{33}$$

u kann mit $\sqrt[n]{x}$ ersetzt werden

$$= \frac{1}{n\, (\sqrt[n]{x})^{n-1}} \tag{34}$$

$$= \frac{1}{n\, x^{\frac{n-1}{n}}} \tag{35}$$

schlussendlich

$$u' = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} \tag{36}$$

Literatur

[1] Dr. Paul Streckeisen. *Gebrochene rationale Funktionen.* Compendio Bildungsmedien AG, Zürich.

[2] Dr. Paul Streckeisen. *Kettenregel, Wurzelfunktionen.* Compendio Bildungsmedien AG, Zürich.

[3] Bianka Dubler, *Einführung in die Differentialrechnung; Kurvendiskussion.* Jonen: 1999.